

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

**Introduzione alla Teoria del
Lensing Gravitazionale**

Lecture Notes

Autore:
Roberto Caione

Supervisor:
Massimo Meneghetti
Correlatori:
Lauro Moscardini
Carlo Giocoli

Indice

1	Proprietà del Lensing Gravitazionale	1
1.1	Deflessione della luce	1
1.2	Introduzione alla teoria del lensing gravitazionale	1
1.2.1	L'equazione della lente	3
1.2.2	Le proprietà del lensing	4
1.2.3	Superfici di ritardo temporale	8
2	Modelli di Lente	11
2.0.1	Modelli a simmetria circolare	11
	Lenti Power Law	13
	Singular Isothermal Sphere - SIS	13
	Non singular Isothermal Sphere - NIS	15
	Il modello Navarro Frenk White - NFW	16
	Il modello di Hernquist	17
	Pseudo Isothermal Elliptical Mass Distribution - PIEMD	18
2.0.2	Modelli ellittici	19
	Singular Isothermal Ellipsoid - SIE	19
	Non singular Isothermal Ellipsoid - NIE	22
2.0.3	Modelli pseudo-ellittici	23
2.0.4	Modelli complessi	23
	Lenti ottenute dalle simulazioni	24
	Sottostrutture	24
3	Lensing Gravitazionale da ammassi di galassie	27
3.1	Gli ammassi di galassie	27
3.1.1	Classificazione morfologica	28
3.1.2	Cinematica	29
3.1.3	Intra Cluster Medium	29
	Stelle nell'Intra Cluster Medium	30
3.1.4	Effetto Sunyaev-Zeldovich - cenni	31
3.1.5	Profili di densità della materia oscura	32
	Profilo di Navarro Frenk White generalizzato	33
	Profilo di Einasto	33
3.2	Lensing da ammassi di galassie	33
3.2.1	Cenni storici e stato dell'arte	35
3.2.2	Sezione d'urto di un ammasso di galassie	37
	Bibliografia	39

Capitolo 1

Proprietà del Lensing Gravitazionale

1.1 Deflessione della luce

Il primo ad avere l'idea che la luce potesse essere *deflessa* dalla gravità fu I. Newton in una serie di quesiti alla fine del suo trattato *Optiks*, pubblicato nel 1704.

In un secondo momento l'astronomo tedesco J. G. Von Soldner eseguì il primo calcolo, concludendo che la deflessione di un fotone la cui traiettoria sfiora la superficie del Sole ammonta a circa $0.9''$. Nel 1911, mentre era impegnato nello sviluppo della teoria della Relatività Generale, Einstein comprese come un corpo massiccio potesse agire come lente gravitazionale deviando i raggi luminosi quando questi ultimi lo intercettano, tuttavia il conto, basato sulle leggi della Relatività Speciale, diede un angolo di deviazione errato per un fattore due, perché non considerò la curvatura dello spazio.

Nell'ottobre del 1913, Einstein scrisse ad Hale, un astronomo statunitense, chiedendo se fosse possibile misurare un angolo di deflessione di circa $0.87''$. La risposta fu negativa, ma Einstein non si arrese e quando nel 1915 rifece il calcolo utilizzando la teoria della Relatività Generale, trovò il giusto valore, circa $1.75''$. Il risultato fu clamorosamente confermato da Sir A. Eddington durante l'eclissi solare del 29 Maggio 1919. Anche se l'argomento era stato ampiamente trattato sul piano teorico, la prima lente gravitazionale fu scoperta nel 1979 ed è legata ad un quasar (QSO 0957 + 561), per approfondire si veda (Walsh et al., 1979). L'esistenza di due oggetti separati da circa $6''$ e caratterizzati da uno spettro identico portò alla conclusione che si trattava dello stesso oggetto, ma duplicato. Il valore errato ottenuto prima dell'avvento della teoria della Relatività Generale nasce nell'ambito della *teoria corpuscolare della luce*, la quale assume che i fotoni sono a massa nulla. In questo contesto, la derivazione dell'angolo di deflessione di un fotone da parte di un corpo con massa M è piuttosto semplice; facendo uso delle leggi di Newton e dei principi della Relatività Speciale di Einstein si trova la seguente espressione analitica per l'angolo di deflessione:

$$\hat{\alpha} = \frac{2GM}{c^2 R}. \quad (1.1)$$

Nel caso del Sole il parametro d'impatto R del fotone è assunto pari al raggio dello stesso, ovvero $R_{\odot} = 6.96 \times 10^8 m$ ed $M = M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30} kg$. Usando la teoria della gravità newtoniana e assumendo che i fotoni siano dei corpuscoli luminosi, otteniamo il valore inesatto di $0.875''$.

1.2 Introduzione alla teoria del lensing gravitazionale

In accordo con la teoria della Relatività Generale, la deflessione della luce può essere calcolata studiando le curve geodetiche le cui proprietà geometriche sono influenzate dal contenuto di materia-energia nello spazio-tempo. In questo contesto risulta che la deflessione della luce può

essere equivalentemente descritta utilizzando il principio di Fermat, come nell'ottica geometrica. Pertanto la deflessione della luce può essere trattata come un problema di rifrazione e la perturbazione spazio-temporale con l'introduzione di un indice di rifrazione. Vediamo ora come definire quest'ultimo. Innanzitutto abbiamo bisogno di due approssimazioni. La prima è detta di *lente sottile*, in quanto assumiamo che le dimensioni della lente siano piccole se comparate a quelle del sistema composto da osservatore, lente e sorgente. La seconda è detta di *lente debole*, ossia $\Phi/c^2 \ll 1$, dove Φ è il potenziale gravitazionale introdotto dalla lente.

Come anticipato nel capitolo ??, su scale di poco maggiori alle centinaia di Mpc, l'universo può essere descritto con l'ausilio della metrica di FRW. Su scale più piccole, la presenza delle galassie e degli ammassi di galassie introduce una perturbazione nella metrica di Minkowski, la quale descrive localmente il tessuto spazio-temporale, ovvero

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} (1 + \frac{2\phi}{c^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -(1 - \frac{2\phi}{c^2}) \end{pmatrix}$$

che porta ad una ridefinizione della metrica ??

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) (d\vec{x})^2. \quad (1.2)$$

Dal momento che la luce si propaga lungo geodetiche nulle, risulta che $ds^2 = 0$, così la velocità effettiva della luce nel campo gravitazionale è

$$c' = \frac{d\vec{x}}{dt} = c \sqrt{\frac{1 + 2\phi/c^2}{1 - 2\phi/c^2}} \approx c \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) < c. \quad (1.3)$$

Quest'ultimo risultato ci permette di definire l'indice di rifrazione come:

$$n = \frac{c}{c'} = \frac{1}{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \approx 1 - \frac{2\phi}{c^2} < 1. \quad (1.4)$$

Essendo $\phi < 0$ ed $n \geq 1$, la velocità della luce nel campo gravitazionale (c') risulta più piccola di quella nel vuoto (c). Nella Sezione 1.6 vedremo cosa comporta questo risultato.

Usando un approccio variazionale si può far vedere che l'angolo di deflessione $\hat{\alpha}$ in prossimità di un corpo di massa M e parametro d'impatto b è il seguente:

$$\hat{\alpha}(b) = \frac{2}{c^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{\nabla}_\perp \phi dz, \quad (1.5)$$

dove con z è indicato l'asse lungo cui si muove il raggio luminoso in assenza di M e $\vec{\nabla}_\perp \phi = (\frac{\partial_x \phi}{\partial_y \phi})$. Nel caso in cui valga l'approssimazione di *lente sottile*, la deflessione avviene su scale spaziali trascurabili rispetto alle distanze tra osservatore, lente e sorgente e su scale temporali trascurabili rispetto a quelle dell'espansione dell'universo. Per lenti che possono essere considerate puntiformi, il precedente risultato può essere approssimato come segue

$$|\hat{\alpha}| = \frac{4GM}{c^2 b} = \frac{2R_s}{b}, \quad (1.6)$$

che è esattamente il doppio di quanto previsto dall'Eq. 1.1; R_s è detto *Raggio di Schwarzschild*. È interessante notare che l'angolo di deflessione di una massa puntiforme dipende linearmente da M , vedremo nella sezione 2.0.4 cosa implica questa constatazione.

È possibile generalizzare la formula 1.6 al caso di N lenti puntiformi, le cui posizioni e masse sono rispettivamente $\vec{\xi}_i$ ed M_i , con $1 \leq i \leq N$; l'angolo di deflessione di un raggio luminoso che attraversa il piano della lente sarà ¹:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \sum_i \hat{\alpha}_i(\vec{\xi} - \vec{\xi}_i) = \frac{4G}{c^2} \sum_i M_i \frac{\vec{\xi} - \vec{\xi}_i}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}_i|^2}, \quad (1.7)$$

dove $\vec{\xi}$ è un vettore bidimensionale sullo stesso piano. All'aumentare del numero di punti, il calcolo dell'angolo di deflessione diventa veramente dispendioso dal punto di vista computazionale, tuttavia, sfruttando degli algoritmi che implementano delle *meshes* o delle gerarchie (come ad esempio in (Barnes & Hut, 1986)), il tempo di calcolo si riduce significativamente, ma di questo parleremo dettagliatamente nel capitolo ??.

Nel caso in cui la distribuzione di materia sia continua, essa è descritta dalla sua densità superficiale

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \int \rho(\vec{\xi}, z) dz, \quad (1.8)$$

dove ρ è la densità tridimensionale della distribuzione di materia. Fino a quando è valida l'approssimazione di lente sottile, l'angolo di deflessione totale è ottenuto sommando il contributo di tutti gli elementi di massa $\Sigma(\vec{\xi})d^2\xi$:

$$\hat{\alpha}(\vec{\xi}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{(\vec{\xi} - \vec{\xi}')\Sigma(\vec{\xi}')}{|\vec{\xi} - \vec{\xi}'|^2} d^2\xi'. \quad (1.9)$$

Nel capitolo ?? analizzeremo la strategia adottata per implementare questo calcolo in un pacchetto Python.

1.2.1 L'equazione della lente

In questa sezione verrà introdotta una relazione tra posizione intrinseca ed osservata di una sorgente in un evento di lensing gravitazionale. In assenza di lente, la luce emessa da una sorgente distante raggiunge un osservatore che la osserva in una certa posizione nel cielo $\vec{\beta}$, detta posizione intrinseca. Quando avviene un fenomeno di lensing invece, i fotoni sono ricevuti da una direzione differente, $\vec{\theta}$, detta posizione apparente della sorgente; entrambe queste posizioni sono espresse in unità angolari. In Fig. 1.2.1 è presente la struttura di un tipico sistema sottoposto al lensing gravitazionale; in quest'ultimo è possibile identificare innanzitutto l'asse ottico, la linea tratteggiata perpendicolare ai piani di lente e sorgente: consideriamo una sorgente con una posizione angolare intrinseca $\vec{\beta}$, la quale giace sul piano della sorgente ad una distanza $\vec{\eta} = \vec{\beta}D_S$ dall'asse ottico, quest'ultima emette dei fotoni, interpretabili come *raggi luminosi*, che impattano sul piano della lente a $\vec{\xi} = \vec{\theta}D_L$ deflessi di un angolo $\hat{\alpha}$ ed infine raggiungono l'osservatore. Se $\vec{\theta}$, $\vec{\beta}$ ed $\hat{\alpha}$ sono abbastanza piccoli, la posizione vera e quella osservata della sorgente sono legate da una relazione alquanto semplice detta *equazione della lente*:

$$\vec{\beta} = \vec{\theta} - \vec{\alpha}(\vec{\theta}); \quad (1.10)$$

$\vec{\alpha}$ è detto *angolo di deflessione ridotto* pari a:

$$\vec{\alpha}(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(\vec{\theta}), \quad (1.11)$$

¹La formula è molto simile a quella che si usa per calcolare la forza gravitazionale tra due masse puntiformi su un piano: mentre quest'ultima dipende dall'inverso della distanza al quadrato, quella dell'angolo di deflessione scala semplicemente come l'inverso della distanza.

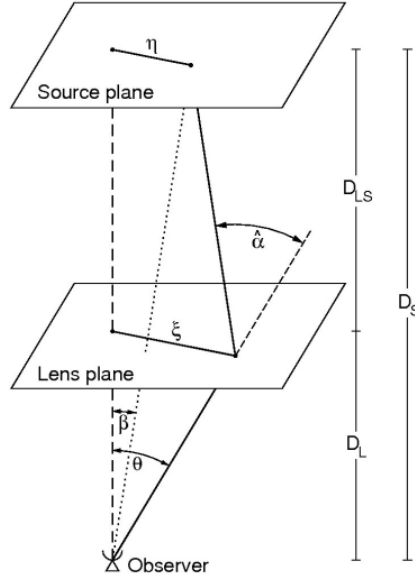


Figura 1.1: Schema di un generico sistema di Lensing Gravitazionale (Bartelmann & Schneider, 2001)

dove D_{LS} è la distanza in diametro angolare tra lente e sorgente. In generale $D_S \neq D_{LS} + D_L$, tranne nei casi in cui l'espansione dell'universo può essere trascurata (ad esempio per lenti e sorgenti appartenenti alla nostra galassia).

La distanza effettiva del lensing non incrementa indefinitamente col redshift, ma ha un massimo e poi decresce come possiamo vedere in Fig. 1.2.

A dispetto della complessiva semplicità dell'equazione della lente, $\vec{\alpha}(\vec{\theta})$ spesso è una funzione abbastanza complicata, cosicché l'equazione della lente non sempre può essere risolta analiticamente.

È molto comune e anche più maneggevole riscrivere l'Eq. 1.10 in forma adimensionale. Questo può essere fatto introducendo una lunghezza di scala ξ_0 sul piano della lente e una corrispondente lunghezza di scala sul piano della sorgente $\eta_0 = \xi_0 D_S / D_L$. Una volta definiti i vettori adimensionali $\vec{x} \equiv \vec{\xi} / \xi_0$, $\vec{y} \equiv \vec{\eta} / \eta_0$ e l'angolo di deflessione adimensionale,

$$\vec{\alpha}(\vec{x}) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\alpha}(\xi_0 \vec{x}), \quad (1.12)$$

l'equazione della lente assume la seguente connotazione:

$$\vec{y} = \vec{x} - \vec{\alpha}(\vec{x}). \quad (1.13)$$

Osservando la struttura dell'Eq. 1.10 e dell'Eq. 1.13, risulta ovvio che conoscendo la posizione intrinseca della sorgente e la natura dell'angolo di deflessione, è possibile trovare la posizione delle immagini multiple sul piano della lente. Nelle prossime sezioni avremo modo di vedere come questo può essere fatto analiticamente solo per alcuni modelli di lente dotati di una distribuzione di massa relativamente semplice. Nei casi reali l'equazione è altamente non lineare e dal punto di vista matematico esistono soluzioni molteplici.

1.2.2 Le proprietà del lensing

Una distribuzione estesa di materia è caratterizzata dal cosiddetto potenziale effettivo del lensing $\hat{\Psi}$, ottenuto proiettando il potenziale Newtoniano tridimensionale sul piano della lente,

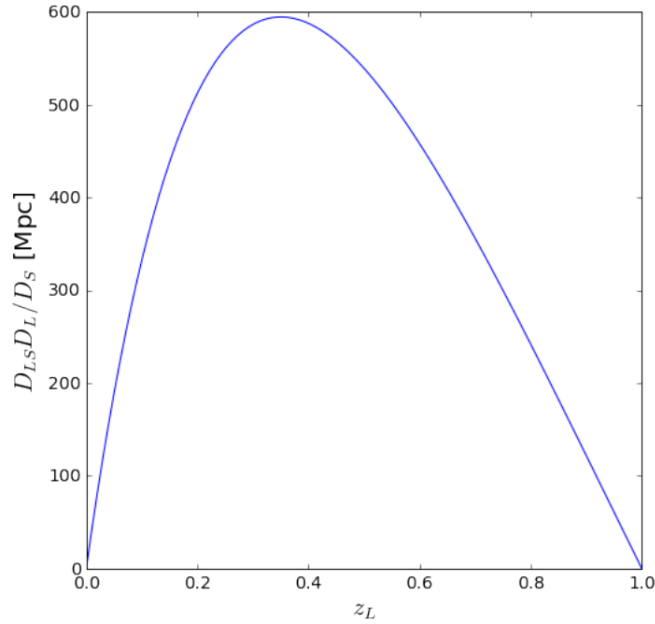


Figura 1.2: Il rapporto tra le distanze del lensing ha un massimo, il che significa che esiste una distanza ottimale dove la lente è in pieno regime.

riscalandolo opportunamente:

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) \equiv \frac{D_{LS}}{D_L D_S} \frac{2}{c^2} \int \Phi(D_L \vec{\theta}, z) dz. \quad (1.14)$$

Il *potenziale del lensing* soddisfa due importanti proprietà:

- il gradiente di $\hat{\Psi}$ è uguale all'angolo di deflessione ridotto

$$\vec{\nabla}_{\theta} \hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \vec{\alpha}(\vec{\theta}) \quad (1.15)$$

- Il laplaciano di $\hat{\Psi}$ è uguale al doppio della convergenza κ

$$\Delta \hat{\Psi}(\vec{\theta}) = 2\kappa. \quad (1.16)$$

La *convergenza* è definita come una densità superficiale adimensionale, ovvero:

$$\kappa(\vec{\theta}) \equiv \frac{\Sigma(\vec{\theta})}{\Sigma_{cr}}, \quad (1.17)$$

con Σ_{cr} chiamata *densità superficiale critica*, una quantità caratterizzante il sistema costituito da osservatore, lente e sorgente ed espressa come una funzione delle distanze in diametro angolare di lente, sorgente e tra lente e sorgente:

$$\Sigma_{cr} \equiv \frac{c^2}{4\pi G} \frac{D_S}{D_L D_{LS}}. \quad (1.18)$$

Una delle principali implicazioni del lensing gravitazionale è la distorsione dell'immagine, particolarmente evidente nel caso in cui la sorgente è estesa. La distorsione nasce dal fatto che i fasci di luce sono deflessi in maniera differenziale. Idealmente, la forma delle immagini può essere determinata risolvendo l'equazione della lente per tutti i punti della sorgente estesa; nel caso in cui la sorgente sia più piccola della scala angolare sulla quale il campo dell'angolo di deflessione cambia, l'equazione della lente è localmente linearizzata.

Sia $\vec{\theta}$ un punto sul piano della lente e $\vec{\theta}' = \vec{\theta} + d\vec{\theta}$ un punto nelle sue vicinanze, il cui angolo di deflessione associato è

$$\vec{\alpha}' \simeq \vec{\alpha} + \frac{d\vec{\alpha}}{d\vec{\theta}} d\vec{\theta}. \quad (1.19)$$

È possibile eseguire una mappatura lineare tra piano della lente e piano della sorgente. I punti $\vec{\theta}$ e $\vec{\theta}'$ sono *mappati* nei punti $\vec{\beta}$ e $\vec{\beta}' = \vec{\beta} + d\vec{\beta}$ appartenenti al piano della sorgente; dal punto di vista matematico questa mappatura è definita nella seguente maniera:

$$(\vec{\beta}' - \vec{\beta}) = \left(I - \frac{d\vec{\alpha}}{d\vec{\theta}} \right) (\vec{\theta}' - \vec{\theta}). \quad (1.20)$$

In altre parole, la distorsione delle immagini può essere descritta dalla seguente matrice Jacobiana:

$$A \equiv \frac{\partial \vec{\beta}}{\partial \vec{\theta}} = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial \alpha_i(\vec{\theta})}{\partial \theta_j} \right) = \left(\delta_{ij} - \frac{\partial^2 \hat{\psi}(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right) = (\delta_{ij} - \hat{\Psi}_{ij}), \quad (1.21)$$

dove θ_i è la componente i -esima di $\vec{\theta}$ sul piano della lente.

Introducendo il tensore simmetrico di shear

$$\Gamma \equiv \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 \\ \gamma_2 & -\gamma_1 \end{pmatrix},$$

le cui componenti γ_1, γ_2 sono legate alle derivate seconde del potenziale del lensing come

$$\gamma_1 = \frac{1}{2}(\Psi_{11} - \Psi_{22}) \quad (1.22)$$

$$\gamma_2 = \Psi_{12}, \quad (1.23)$$

la metrica Jacobiana può essere decomposta in una parte isotropa ed una anisotropa e può essere riscritta nella seguente maniera:

$$A = (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}.$$

Dal momento che le componenti dello shear sono invarianti sotto rotazioni di $\phi = \pi$, esso è un tensore di spin 2.

La convergenza determina una trasformazione isotropa della sorgente e lo shear uno stretch lungo una direzione privilegiata, come si vede in Fig. 1.3, dove lo stretch corrisponde ad un termine extra nella direzione stabilita dall'angolo ϕ .

Nel caso di una sorgente circolare di raggio r come quella in Fig. 1.4, la sorgente è riscalata di un fattore costante $1/(1 - \kappa)$ in tutte le direzioni e allungata in una particolare direzione; la figura finale è una ellisse i cui semi-assi maggiore e minore sono rispettivamente:

$$a = \frac{r}{1 - \kappa - \gamma} \quad b = \frac{r}{1 - \kappa + \gamma}. \quad (1.24)$$

Un'importante conseguenza della distorsione del lensing è l'amplificazione delle immagini. Sfruttando l'equazione del lensing è possibile far vedere come l'angolo solido $\delta\beta^2$ è mappato nell'angolo solido $\delta\theta^2$; il teorema di Liouville assicura che in assenza di emissione o assorbimento di fotoni, il profilo di brillantezza superficiale della sorgente è conservato, così il cambio di angolo solido sotto il quale la sorgente è osservata implica che il flusso ricevuto è amplificato o deamplificato. L'amplificazione è data dall'inverso del determinante della matrice Jacobiana, motivo per il quale la matrice $M = A^{-1}$ è chiamata *tensore di amplificazione*:

$$\mu \equiv \det M = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{(1 - \kappa)^2 - \gamma^2}. \quad (1.25)$$

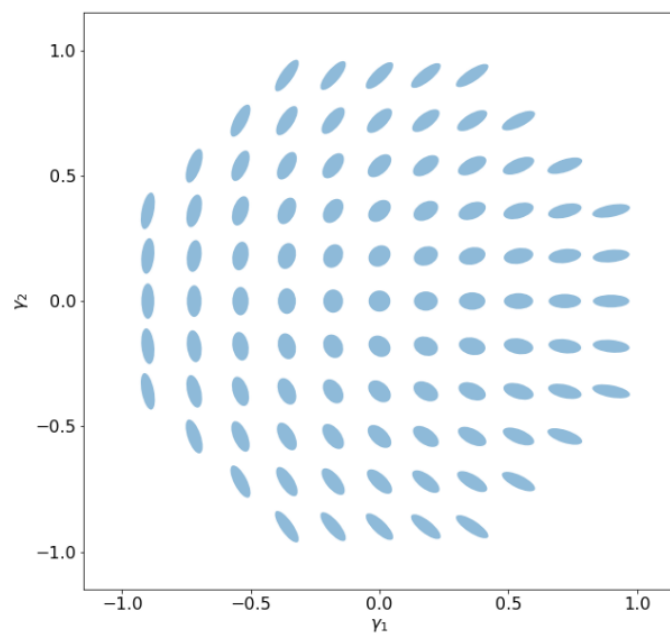


Figura 1.3: Stretch di una sorgente circolare per differenti valori di shear.

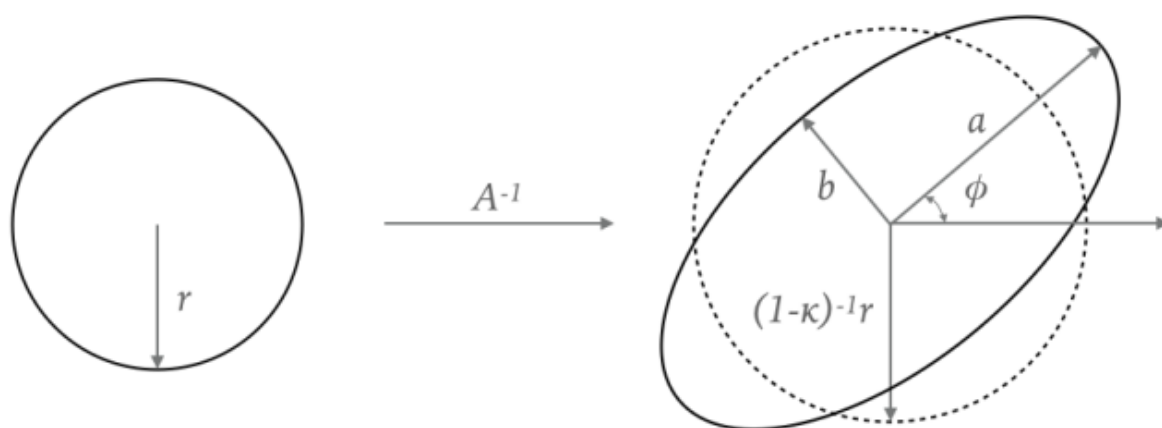


Figura 1.4: Distorsione di una sorgente circolare dovuta alla convergenza e allo shear.

Gli autovalori del tensore di amplificazione misurano l'amplificazione nella direzione degli autovettori del tensore di shear. Per una lente a simmetria assiale, questi ultimi sono approssimativamente orientati tangenzialmente e radialmente rispetto ai contorni di isodensità, così i fattori di amplificazione tangenziale e radiale sono rispettivamente:

$$\mu_t = \frac{1}{\lambda_t} = \frac{1}{1 - \kappa - \gamma}, \quad \mu_r = \frac{1}{\lambda_r} = \frac{1}{1 - \kappa + \gamma}, \quad (1.26)$$

dove i denominatori sono rispettivamente gli autovalori tangenziali e radiali della matrice Jacobiana. Quando $\lambda_t = 0$ e $\lambda_r = 0$, l'amplificazione è idealmente infinita: queste due condizioni definiscono due curve sul piano della lente, chiamate *linee critiche* tangenziali e radiali. È possibile estendere l'equazione della lente includendo i termini del secondo ordine nell'espansione dell'angolo di deflessione, così l'equazione della lente diventa

$$\beta_i \simeq \frac{\partial \beta_i}{\partial \theta_j} \theta_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \theta_j \theta_k. \quad (1.27)$$

Introducendo il seguente tensore

$$D_{ijk} = \frac{\partial^2 \beta_i}{\partial \theta_j \partial \theta_k} = \frac{\partial A_{ij}}{\partial \theta_k}, \quad (1.28)$$

con della semplice algebra si ottiene

$$D_{ij1} = \begin{pmatrix} -2\gamma_{1,1} - \gamma_{2,2} & -\gamma_{2,1} \\ -\gamma_{2,1} & -\gamma_{2,2} \end{pmatrix} \quad D_{ij2} = \begin{pmatrix} -\gamma_{2,1} & -\gamma_{2,2} \\ -\gamma_{2,2} & -2\gamma_{1,2} - \gamma_{2,1} \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Dunque, gli effetti del lensing al secondo ordine possono essere espressi in termini di derivate seconde dello shear o di derivate terze del potenziale. Le matrici 1.29 possono essere espresse in termini di due quantità chiamate flessioni F e G che descrivono rispettivamente trasformazioni invarianti sotto rotazioni di 2π o $2\pi/3$. La prima, un campo vettoriale di spin 1, è una quantità che deforma le immagini lungo una particolare direzione, introducendo delle asimmetrie nella sua forma, mentre la seconda è un campo tensoriale di spin 3. Le rispettive espressioni matematiche sono:

$$F = F_1 + iF_2 = (\gamma_{1,1} + \gamma_{2,2}) + i(\gamma_{2,1} - \gamma_{1,2}) \quad (1.30)$$

e

$$G = G_1 + iG_2 = (\gamma_{1,1} - \gamma_{2,2}) + i(\gamma_{2,1} + \gamma_{1,2}). \quad (1.31)$$

1.2.3 Superfici di ritardo temporale

In un sistema caratterizzato dal lensing gravitazionale, la deflessione dei raggi luminosi causa un ritardo temporale che dipenderà da un fattore geometrico e dal contesto gravitazionale introdotto dalle proprietà della lente:

$$t_{tot} = t_{grav} + t_{geom}. \quad (1.32)$$

Inoltre, la distanza attraversata dai fotoni dipende dalla storia di espansione dell'universo che è legata alla costante di Hubble e possiamo usare il ritardo temporale tra le immagini multiple per calcolarla. Il ritardo gravitazionale, noto anche come ritardo di Shapiro, può essere derivato confrontando il tempo impiegato dalla luce per viaggiare nello spazio-tempo caratterizzato da un certo indice di rifrazione e il tempo impiegato per viaggiare nello spazio-tempo vuoto, assumendo la stessa traiettoria. Sia l'indice di rifrazione di cui parlavamo poc'anzi dato dall'Eq. 1.4, il ritardo gravitazionale è espresso nella maniera seguente:

$$t_{grav} = \int \frac{dz}{c'} - \int \frac{dz}{c} = \frac{1}{c} \int (n - 1) dz = -\frac{2}{c^3} \int \Phi dz. \quad (1.33)$$

Usando la definizione 1.14 di potenziale del lensing, l'espressione precedente diventa:

$$t_{grav} = -\frac{D_L D_S}{D_{LS}} \frac{1}{c} \hat{\Psi}. \quad (1.34)$$

Il secondo termine del ritardo temporale è il ritardo geometrico dovuto al differente cammino dei raggi di luce deflessi rispetto a quelli imperturbati. Questo ritardo è proporzionale al quadrato della separazione angolare tra posizione intrinseca della sorgente e posizione osservata della sua immagine ed è semplicemente espresso come

$$t_{geom} = \frac{1}{c} \xi \hat{c}, \quad (1.35)$$

dove $\xi \hat{c}$ è il cammino extra fatto dai raggi luminosi in presenza di una lente, il quale si ricava dalla metrica ma anche da un banale costruito geometrico come quello in Fig. 1.5, dove:

$$\xi = D_L (\vec{\theta} - \vec{\beta}) \quad \hat{c} = \frac{\hat{\alpha}}{2} = \frac{1}{2} \frac{D_S}{D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta}) \quad (1.36)$$

da cui:

$$t_{geom} = \frac{1}{2c} \frac{D_S D_L}{D_{LS}} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2. \quad (1.37)$$

Sostituendo l'Eq. 1.34 e l'Eq. 1.37 nell'Eq. 1.32 otteniamo l'espressione completa per il ritardo gravitazionale del lensing nella posizione $\vec{\theta}$ sul piano della lente:

$$t(\vec{\theta}) = \frac{1+z_L}{c} \frac{D_S D_L}{D_{LS}} \left[\frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \hat{\Psi}(\vec{\theta}) \right] = \frac{D_{\Delta t}}{c} \tau(\vec{\theta}), \quad (1.38)$$

dove il termine $(1+z_L)$ è stato introdotto per tenere conto dell'espansione dell'universo; le quantità

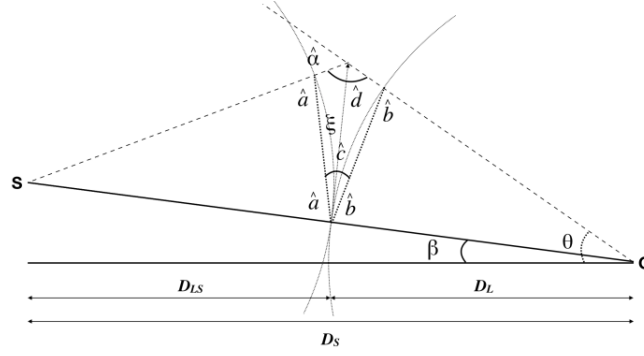
$$D_{\Delta t} \equiv (1+z_L) \frac{D_S D_L}{D_{LS}} \quad \tau(\vec{\theta}) \equiv \frac{1}{2} (\vec{\theta} - \vec{\beta})^2 - \hat{\Psi}(\vec{\theta}) \quad (1.39)$$

sono chiamate rispettivamente distanza del ritardo temporale e potenziale di Fermat. Sfruttando le proprietà del lensing si può vedere come il gradiente del termine in parentesi nell'Eq. 1.38 è equivalente all'equazione della lente. Questo implica che le soluzioni di quest'ultima, ossia le immagini, sono localizzate nei punti stazionari della superficie di ritardo temporale (Eq. 1.38). La matrice Hessiana della suddetta superficie è

$$T = \frac{\partial^2 t(\vec{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \propto (\delta_{ij} - \hat{\Psi}_{ij}) = A. \quad (1.40)$$

Essendo questa proporzionale allo Jacobiano del lensing e $\mu = \det A^{-1}$, è chiaro come la curvatura della superficie nella posizione delle immagini è inversamente proporzionale all'amplificazione delle stesse ² dell'immagine, inoltre la forma della superficie di ritardo temporale vicino ai punti stazionari ci dà informazioni riguardo alla forma delle immagini. È possibile distinguere tre tipi di immagini:

- tipo I: appaiono nei *minimi* della superficie di ritardo temporale, dove gli autovalori della matrice Hessiana sono entrambi positivi, $\det A > 0$, $Tr A > 0$ e $\mu > 0$;
- tipo II: appaiono nei punti di *sella* della superficie di ritardo temporale, dove gli autovalori della matrice Hessiana hanno segni opposti, $\det A < 0$, $Tr A = 0$ e $\mu < 0$;
- tipo III: appaiono nei *massimi* della superficie di ritardo temporale, dove gli autovalori della matrice Hessiana sono entrambi negativi, $\det A > 0$, $Tr A < 0$ e $\mu > 0$.



$$(\pi - \hat{a}) + (\pi - \hat{b}) + \hat{c} + \hat{d} = 2\pi \Rightarrow \hat{a} + \hat{b} = \hat{c} + \hat{d}$$

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = \pi \Rightarrow 2\hat{c} = \pi - \hat{d}$$

$$\hat{a} + \hat{d} = \pi \Rightarrow \hat{d} = \pi - \hat{a}$$

Figura 1.5: Schema del ritardo temporale geometrico

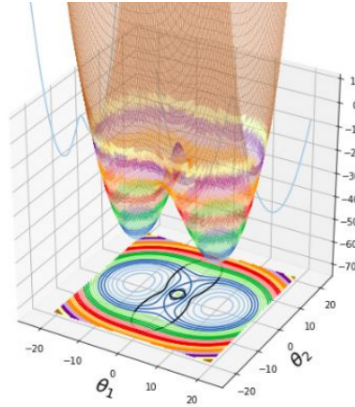


Figura 1.6: Superficie di ritardo temporale per la una lente pseudo ellittica con core (pSIEc).

Inoltre le superfici di ritardo temporale, come quella in Fig. 1.6, godono di alcune proprietà che elenchiamo di seguito:

- le differenze in altezza per punti diversi di una stessa superficie $t(\vec{\theta})$ ci danno le differenze in tempo di arrivo tra le diverse immagini. Il ritardo temporale può essere misurato nel caso in cui la sorgente lensata abbia una luminosità intrinseca variabile, ad esempio una supernova o un quasar;
- in assenza di lente la superficie di ritardo temporale è una parabola con un singolo minimo;
- quando compaiono immagini aggiuntive esse si formano nei punti stazionari, con una curvatura che cambia da negativa a positiva, passando per zero. Ricordiamo che $\det A = 0$ è la condizione per avere un punto critico, dove l'amplificazione è idealmente infinita. Le linee critiche dunque separano coppie di immagini multiple, queste coppie mergono e scompaiono sulle linee critiche. In sostanza le linee critiche separano le regioni con differenti molteplicità.

²Il segno dell'amplificazione è relativo esclusivamente alla parità dell'immagine, la quale ne determina l'orientamento rispetto ad una sorgente non lensata. Avere un'amplificazione negativa, pertanto, non significa che l'immagine è deamplificata, questa circostanza è verificata solo quando $|\mu| < 1$

Capitolo 2

Modelli di Lente

Ogni massa nell'universo è una lente gravitazionale. Dipendentemente dalle dimensioni della lente e della complessità della sua distribuzione di massa, possiamo cercare di scrivere le sue proprietà di lensing con modelli opportuni. Nel caso di stelle nella nostra galassia, ad esempio, possiamo usare il modello di lente puntiforme. Tipicamente, gli effetti di una simile lente sono su scale angolari molto piccole, $\theta_E \sim (10^{-3})''$. Questo particolare regime del lensing è detto "Microlensing". Nel caso di ammassi di galassie è necessario ricorrere a modelli di lente estesa. Sono osservabili due regimi di lensing:

- lensing forte: osservabile su scale angolari di $\theta_E \sim 1''$ nel caso di galassie e $\theta_E \sim 1'$ nel caso di ammassi di galassie, e accompagnato da grandi distorsioni e comparsa di immagini multiple;
- lensing debole, osservabile a grandi distanze dal centro della lente.

In questa sezione vengono presentati i fenomeni legati al regime dello strong lensing, dove le lenti possono essere descritte come distribuzioni di massa estese e confinate; a questa categoria appartengono strutture come galassie e ammassi di galassie.

Ci concentreremo dapprima su lenti le cui proprietà possono essere completamente espresse tramite delle formule analitiche, verranno discusse lenti dotate di particolari simmetrie, assiale o ellissoidale, per poi analizzare lenti con profili di densità non ordinari e infine lenti con caratteristiche intrinseche particolarmente complesse da poter essere studiate soltanto con metodi numerici.

2.0.1 Modelli a simmetria circolare

Il caso più semplice di lente si ha quando quest'ultima è a simmetria assiale o circolare; per lenti di questo tipo, il potenziale del lensing dipende esclusivamente dalla distanza dal centro della lente, indipendentemente dalla direzione. Date le proprietà di simmetria della lente, è conveniente scegliere l'origine del sistema di riferimento al centro della lente, così la maggior parte delle equazioni si riducono ad una forma adimensionale.

Sia il potenziale del lensing

$$\hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \hat{\Psi}(\theta), \quad (2.1)$$

dove $\vec{\theta}$ è il classico vettore espresso in unità angolari sul piano della lente (per usare le unità fisiche basta tener conto della relazione $\vec{\xi} = D_L \vec{\theta}$). Come visto nel paragrafo 1.2.2 il gradiente del potenziale ci restituisce l'angolo di deflessione ridotto. In queste circostanze è conveniente usare le coordinate polari cosicché:

$$\vec{\nabla}_{\theta} \hat{\Psi}(\vec{\theta}) = \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \vec{e}_{\theta} + \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{e}_{\phi} \right) \hat{\Psi}(\theta) = \alpha(\theta) \vec{e}_{\theta}, \quad (2.2)$$

dove \vec{e}_θ ed \vec{e}_ϕ sono due vettori unitari, il primo orientato in direzione radiale e il secondo in direzione perpendicolare. L'angolo di deflessione risulta così centrale.

Sfruttando la seconda proprietà del lensing e la definizione di laplaciano in coordinate polari, possiamo calcolare la convergenza:

$$\frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \hat{\Psi}(\theta) = 2\kappa(\theta). \quad (2.3)$$

Da questa equazione è possibile ancora una volta ottenere l'angolo di deflessione:

$$\alpha(\theta) = \frac{2 \int_0^\theta \kappa(\theta') \theta' d\theta'}{\theta} = \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{4GM(\theta)}{c^2 D_L \theta} = \frac{D_{LS}}{D_S} \hat{\alpha}(\theta). \quad (2.4)$$

L'Eq. 2.4 è identica alla formula dell'angolo di deflessione per una lente con massa puntiforme (1.6), la sola differenza è che la massa M è sostituita dalla massa racchiusa entro un raggio θ .

Ovviamente, scegliere di trattare la questione dal punto di vista adimensionale semplifica il tutto, così, scelta una scala arbitraria ξ_0 alla quale corrisponde la scala angolare $\theta_0 = \xi/D_L$ e ricordandoci delle definizioni 1.12 e 1.17, l'angolo di deflessione adimensionale per una lente a simmetria assiale è il seguente:

$$\alpha(x) = \frac{D_L D_{LS}}{\xi_0 D_S} \hat{\alpha}(\xi_0 x) = \frac{M(\xi_0 x)}{\pi \xi_0^2 \Sigma_{crit}} \frac{1}{x} \equiv \frac{m(x)}{x} \quad (2.5)$$

dove è stata introdotta la massa adimensionale

$$m(x) \equiv 2 \int_0^x x' \kappa'(x') dx'. \quad (2.6)$$

Senza addentrarci nei rispettivi calcoli riportiamo uno specchio riassuntivo delle proprietà fondamentali del lensing per una lente a simmetria assiale:

- $y = x - \frac{m(x)}{x}$ equazione della lente
- $\kappa(x) = \frac{1}{2} \frac{m'(x)}{x}$ convergenza
- $\gamma(x) = |\kappa(x) - \bar{\kappa}(x)|$ shear
- $\det A = [1 - \bar{\kappa}(x)][1 + \bar{\kappa}(x) - 2\kappa(x)]$ Jacobiano del Lensing
- $[1 - \bar{\kappa}(x)]$ amplificazione in direzione tangenziale
- $[1 + \bar{\kappa}(x) - 2\kappa(x)]$ amplificazione in direzione radiale.

Poiché le linee critiche si formano dove $\det A = 0$, le condizioni sullo Jacobiano del lensing implicano che le lenti a simmetria assiale con un profilo di massa monotono crescente possono avere due linee critiche, per le quali risulta che $\bar{\kappa}(x) = 1$ e $2\kappa(x) - \bar{\kappa}(x) = 1$. Entrambe queste condizioni definiscono dei cerchi sul piano della lente, la prima condizione definisce la linea critica tangenziale e la seconda la linea critica radiale. Sfruttando l'equazione della lente, i punti lungo la linea critica radiale sono mappati nella caustica radiale sul piano della sorgente, mentre la caustica tangenziale è puntiforme. Ogni immagine vicina ad una linea critica tangenziale è tangenzialmente distorta alla curva stessa. Al contrario, ogni immagine vicina alla linea critica radiale è radialmente distorta. Gli autovalori della matrice Jacobiana sono le amplificazioni dell'immagine lungo le direzioni rispettivamente tangenziali e radiali.

Lenti Power Law

Le lenti *Power Law* sono una classe particolare di lenti a simmetria assiale il cui profilo di massa è espresso tramite una legge del tipo

$$m(x) = x^{3-n}. \quad (2.7)$$

In virtù di quanto detto nella Sezione 2.0.1 è facile vedere come il profilo di convergenza per una lente Power Law sia:

$$\kappa(x) = \frac{m'(x)}{2x} = \frac{3-n}{2} x^{1-n}. \quad (2.8)$$

A seconda che n sia più grande o più piccolo di 1, $\kappa(x)$ è una funzione crescente o decrescente di x . Valori di $n < 1$ sono quindi di poco interesse.

A causa della scelta di normalizzazione dei profili di massa, le linee critiche tangenziali delle lenti Power Law sono cerchi con raggio $x_t = 1$, detti anelli di Einstein. Il raggio di Einstein in unità angolari è

$$\theta_E \equiv \sqrt{\frac{4GM(\theta_E)}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}}. \quad (2.9)$$

Le dimensioni della linea critica radiale x_r variano al variare dell'indice n in accordo con l'equazione

$$(2-n)x_r^{1-n} = 1, \quad (2.10)$$

la quale può essere risolta per x_r , ottenendo

$$x_r = (2-n)^{1/(n-1)}. \quad (2.11)$$

In Fig. 2.1 è mostrato come variano le dimensioni delle linee critiche radiali in unità del raggio di Einstein. Effettuando la sostituzione $n' = 1/(n-1)$, si trova che

$$x_r = \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{n'}. \quad (2.12)$$

Dunque, per $n \rightarrow 1$, o $n' \rightarrow \infty$,

$$x_r = \lim_{n' \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n'}\right)^{n'} = \frac{1}{e}. \quad (2.13)$$

Dalla figura si evince che le linee critiche radiali diventano più piccole al crescere di n fino ad annullarsi nel caso in cui $n = 2$. Lenti con profili più ripidi hanno linee critiche radiali più piccole, lenti con $n > 2$ non producono alcuna linea critica. Contrariamente le dimensioni delle caustiche radiali y_r aumentano al crescere di n .

Lenti con un indice $1 < n < 2$ possono produrre una o tre immagini di una stessa sorgente, a seconda che la sorgente si trovi dentro o fuori dalla caustica radiale, come illustrato in Fig. 2.2. Il caso $n = 2$ è spiegato in dettaglio nella prossima sezione. Lenti con $n > 2$ producono sempre due immagini, una dentro e l'altra fuori dall'anello di Einstein.

Singular Isothermal Sphere - SIS

Uno dei modelli di lente a simmetria assiale più usati è la *Sfera Isoterma Singolare*, il cui profilo di densità tridimensionale si ricava assumendo che il contenuto di materia della lente si comporti come un gas ideale confinato da un potenziale gravitazionale a simmetria sferica. Si assume che questo gas sia in equilibrio termico ed idrostatico e quindi:

$$\rho(r) = \frac{\sigma_v^2}{2\pi G r^2}, \quad (2.14)$$

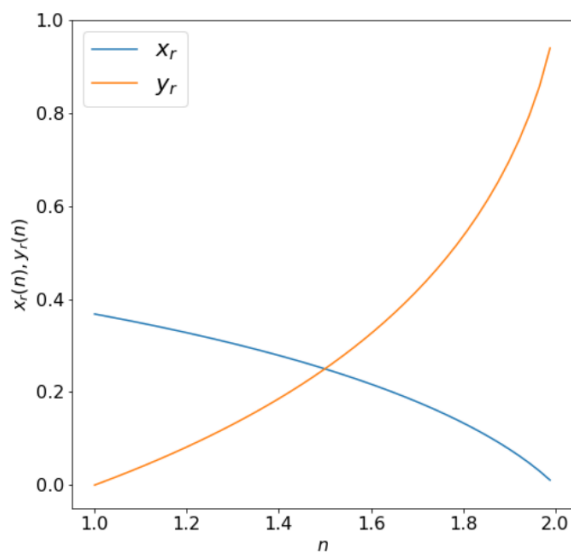


Figura 2.1: Dimensioni delle linee critiche e delle caustiche radiali (in unità di raggi di Einstein) in funzione dell'indice n di una lente Power Law.

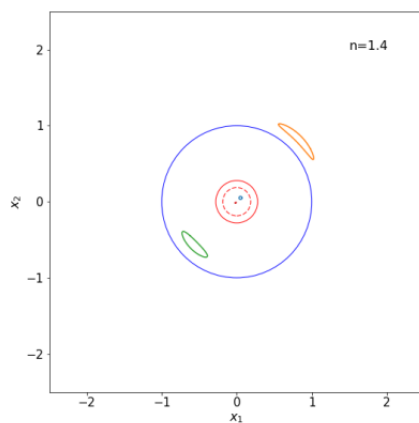


Figura 2.2: Immagini di una sorgente circolare (cerchio azzurro) a distanza $y = 0.05$ dal centro di una lente Power Law con indice $n = 1.4$. In rosso tratteggiato la caustica radiale, in rosso continuo la linea critica radiale e in blu la linea critica tangenziale o Anello di Einstein

dove σ_v è la dispersione di velocità del “gas” ed r la distanza dal centro della sfera. Proiettando la densità tridimensionale lungo la linea di vista, otteniamo la corrispondente densità superficiale:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2G\xi}. \quad (2.15)$$

La lente SIS è un caso particolare di lente Power Law che corrisponde a $n = 2$. Scegliendo

$$\xi_0 \equiv 4\pi \left(\frac{\sigma_v}{c} \right)^2 \frac{D_L D_{LS}}{D_S} \quad (2.16)$$

come lunghezza scala sul piano della lente, otteniamo:

- $y = x - \frac{x}{|x|}$ equazione della lente
- $\kappa(x) = \frac{1}{2x}$ convergenza
- $\gamma(x) = \frac{1}{2x}$ shear
- $\mu(x) = \frac{x}{|x|-1}$ amplificazione.

L'equazione della lente ha due soluzioni per $y < 1$. Le rispettive amplificazioni delle due immagini sono:

$$\mu_+ = 1 + \frac{1}{y} \quad \mu_- = 1 - \frac{1}{y}, \quad (2.17)$$

il che significa che per $y \rightarrow 1$, l'immagine in x_- ha amplificazione nulla. La linea di equazione $y = 1$ definisce il cosiddetto *cut*. Come detto, la molteplicità delle immagini cambia a seconda che la sorgente sia dentro o fuori dal *cut*.

Non singular Isothermal Sphere - NIS

Le classi di lenti viste finora sono caratterizzate da una singolarità centrale nel profilo di convergenza. Nelle lenti SIS è possibile introdurre un *core* ottenendo un modello di lente noto come *Sfera Isoterma non Singolare*. Il core è introdotto nel profilo di densità di una Sfera Isoterma Singolare in questo modo:

$$\Sigma(\xi) = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \xi_c^2}}. \quad (2.18)$$

Con questa modifica, il profilo raggiunge una densità costante piuttosto che divergere quando $\xi \ll \xi_c$. Se prendiamo ancora una volta [2.16](#)¹ come lunghezza scala sul piano della lente, otteniamo le seguenti relazioni:

- $\kappa(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x_c^2}}$ profilo di convergenza
- $m(x) = \sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c^2$ profilo di massa
- $\alpha(x) = \sqrt{1 + \frac{x_c^2}{x^2}} - \frac{x_c}{x}$ angolo di deflessione
- $\gamma(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x_c^2} - x_c}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + x_c^2}}$ shear
- $y = x - \sqrt{1 + \frac{x_c^2}{x^2}} - \frac{x_c}{x}$ equazione della lente

¹L'Eq. [2.16](#) è l'anello di Einstein di una lente SIS ma non di una lente NIS

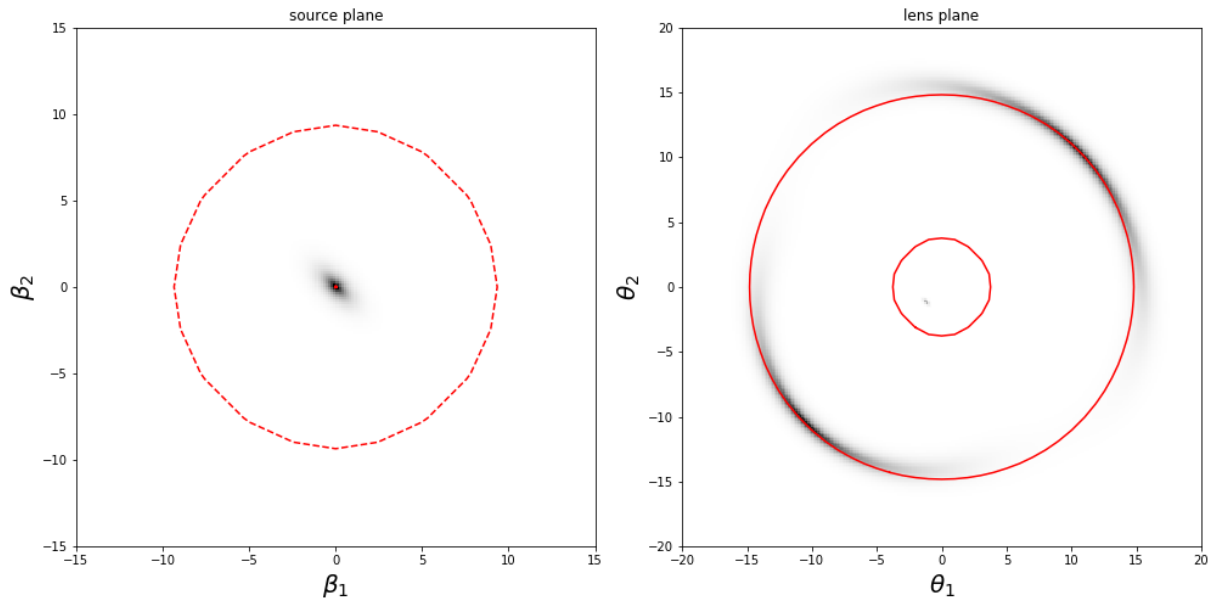


Figura 2.3: Una sorgente con profilo di brillantezza superficiale di Sérsic in prossimità di una caustica tangenziale genera due archi tangenziali, quasi un anello di Einstein.

Sia la linea critica radiale che quella tangenziale esistono solo se $\kappa_c < 1/2$. Pertanto una lente NIS può produrre immagini multiple solo se questa condizione è soddisfatta. In tal caso, il numero di immagini può essere 1 o 3 a seconda che la sorgente sia contenuta o meno della caustica radiale. Come nel caso delle Power Law con $1 < n < 2$, quando la sorgente si trova all'esterno della caustica radiale si forma un'immagine dalla stessa parte della lente rispetto alla sorgente, la quale corrisponde al minimo della superficie di ritardo temporale ed è esterna all'anello di Einstein; quando la sorgente si trova all'interno della caustica radiale invece, si formano due immagini aggiuntive, una all'interno e l'altra all'esterno della stessa caustica. Quella più interna corrisponde al massimo della superficie di ritardo temporale, mentre l'altra al punto di sella. Se la sorgente cade proprio sulla caustica radiale le due immagini si fondono formando un arco radiale. Portare una sorgente in prossimità di una caustica tangenziale causa la distorsione tangenziale delle due immagini più esterne, fino a quando la sorgente è esattamente sulla caustica tangenziale e le due immagini si fondono in un anello di Einstein. L'immagine centrale invece è deamplificata e spostata al centro della lente fino ad essere quasi invisibile. Vedi Fig. 2.3.

Il modello Navarro Frenk White - NFW

Il profilo di Navarro, Frenk e White fu proposto per la prima volta dagli omonimi scienziati nel 1995 ed è tuttora ampiamente utilizzato come funzione universale che descrive le distribuzioni di materia oscura. Ottenuto dalle simulazioni numeriche nel contesto dello scenario Λ CDM e valido su di un intervallo di massa $3 \times 10^{11} \leq M_{vir}/(h^{-1}M_\odot) \leq 3 \times 10^{15}$, è ben descritto da una funzione radiale di questo tipo:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right) \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^2}, \quad (2.19)$$

dove r_s è il raggio scala e ρ_s la densità caratteristica; è caratterizzato da una profilo più ripido a grandi raggi. In genere la massa totale di un alone è scritta come:

$$M_{vir} = \frac{4\pi}{3} r_{vir}^3 \frac{\Delta_{vir}}{\Omega_m(z)} \Omega_0 \rho_c, \quad (2.20)$$

dove ρ_c è la densità critica dell'universo, $\Omega_0 = \Omega_m(t_0)$ è il parametro della densità della materia a $z = 0$ e Δ_{vir} è la sovradensità viriale racchiusa entro il raggio viriale dell'alone r_{vir} che corrisponde alla distanza entro la quale le particelle sono gravitazionalmente legate all'alone e in equilibrio viriale; Δ_{vir} dipende dalla cosmologia e dal redshift. In alternativa a Δ_{vir} , in letteratura si utilizza spesso una sovradensità $\Delta_{200} = 200$, ossia la massa è quella dentro un raggio che contiene una densità media pari a $200\rho_{crit}$. Un parametro molto importante nella descrizione di un profilo di NFW è quello di concentrazione definito come $c_{vir} = r_{vir}/r_s$ (vedi appendice ?? per un ulteriore approfondimento). La concentrazione è legata alla densità caratteristica dalla relazione

$$\rho_s = \frac{M_{vir}}{4\pi r_s^3} \left[\ln(1 + c_{vir}) - \frac{c_{vir}}{1 + c_{vir}} \right]^{-1}. \quad (2.21)$$

Il profilo è completamente definito dai due parametri ρ_s ed r_s o c_{vir} ed M_{vir} . La densità di massa superficiale è uguale a:

$$\Sigma(x) = \frac{2\rho_s r_s}{x^2 - 1} f(x) \quad (2.22)$$

(Bartelmann, 1996), dove $x \equiv \xi/r_s$ e

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & x > 1 \\ 1 - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & x < 1 \\ 0 & x = 1. \end{cases} \quad (2.23)$$

La convergenza è

$$\kappa(x) = 2\kappa_s \frac{f(x)}{x^2 - 1}, \quad (2.24)$$

dove $\kappa_s = \rho_s \cdot r_s / \Sigma_{cr}$. È possibile scrivere le espressioni del potenziale del lensing e dell'angolo di deflessione:

$$\Psi(x) = 4\kappa_s g(x) \quad \alpha(x) = \frac{4\kappa_s}{x} h(x) \quad (2.25)$$

con

$$g(x) = \frac{1}{2} \ln^2 \frac{x}{2} + \begin{cases} 2 \arctan^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & x > 1 \\ -2 \operatorname{arctanh}^2 \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$h(x) = \ln \frac{x}{2} + \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} & x > 1 \\ \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{1-x}{x+1}} & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Il modello di Hernquist

Il profilo di Hernquist fu proposto per la prima volta nel 1990 per descrivere il profilo di luce delle galassie ellittiche. In accordo con (Oguri, 2010) la sua espressione è

$$\rho(r) = \frac{M_{tot}}{2\pi \left(\frac{r}{r_b}\right) \left(1 + \frac{r}{r_b}\right)^3}, \quad (2.28)$$

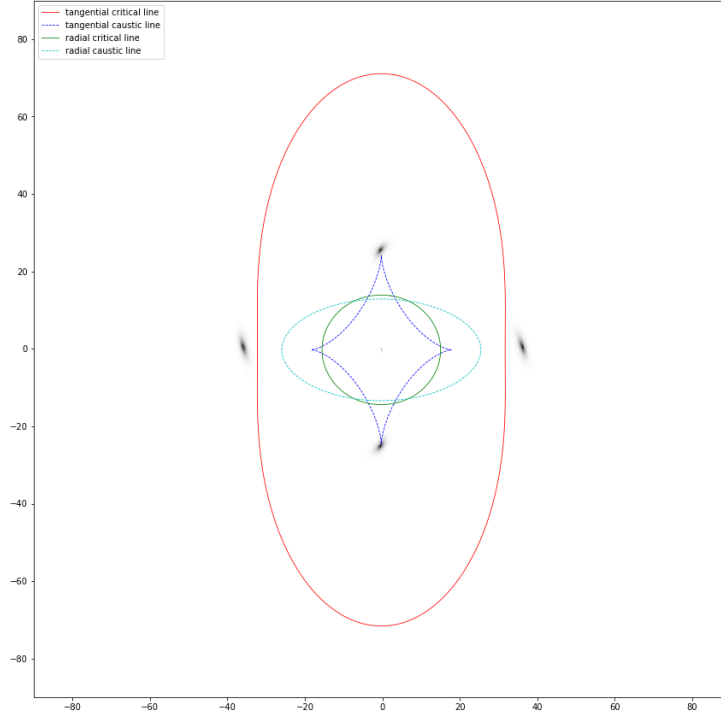


Figura 2.4: Linee critiche e caustiche per una lente NFW con $e = 0.5$. Le immagini multiple, in tutto 5, sono generate da una sorgente con profilo di brillantezza superficiale di Sérsic perfettamente allineata con il centro delle caustiche.

dove r_b è legato al raggio effettivo R_e o raggio di mezza massa tramite la relazione

$$r_b = 0.551R_e. \quad (2.29)$$

Scegliendo r_b come scala di riferimento spaziale e introducendo la grandezza

$$b_{norm} \equiv \frac{M_{tot}}{2\pi r_b^2 \Sigma_{crit}}, \quad (2.30)$$

otteniamo:

- $\kappa(x) = \left(\frac{1}{x^2-1}\right)^2 [-3 + (2 + x^2)F(x)]$ profilo di convergenza
- $\phi(x) = 2F(x) + \ln \frac{x^2}{4}$ potenziale del lensing
- $\alpha(x) = \frac{2x}{x^2-1}[1 - F(x)]$ angolo di deflessione

dove

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \arctan \sqrt{x^2-1} & x > 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctanh} \sqrt{1-x^2} & x < 1 \end{cases} \quad (2.31)$$

Pseudo Isothermal Elliptical Mass Distribution - PIEMD

Il modello PIEMD (Pseudo Isothermal Elliptical Mass Distribution) fu introdotto per la prima volta da (Kassiola & Kovner, 1993) ed è di frequente utilizzato nelle analisi del lensing. La densità 3D è

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{\left(1 + \frac{r^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{r^2}{s^2}\right)}. \quad (2.32)$$

dove ρ_0 è la densità centrale, a il raggio del core ed $s > a$ il raggio troncato. All'interno del raggio del core la densità tende a ρ_0 . Invece, per $r \gg s$ la densità scala come r^{-4} . Nelle regioni intermedie il profilo è isoterma e per quanto riguarda la densità proiettata al raggio ψ sul piano della lente essa risulta uguale a:

$$\Sigma(\xi) = 2 \int_{\xi}^{\infty} \frac{\rho(r)rdr}{\sqrt{r^2 - \xi^2}} = \Sigma_0 \frac{as}{s-a} \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} \right), \quad (2.33)$$

dove

$$\Sigma_0 = \pi \rho_0 \frac{as}{s+a}, \quad (2.34)$$

dalla quale si può ottenere la convergenza ricordandoci della relazione 1.17. Per quanto riguarda lo shear si ha:

$$\gamma(\xi) = \frac{\Sigma_0}{\Sigma_{crit}} \frac{as}{s-a} \left[2 \left(\frac{1}{a + \sqrt{a^2 + \xi^2}} - \frac{1}{s + \sqrt{s^2 + \xi^2}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \xi^2}} - \frac{1}{\sqrt{s^2 + \xi^2}} \right) \right] \quad (2.35)$$

e per la massa all'interno di ξ abbiamo

$$M_{2D}(< \xi) = 2\pi \int_0^{\xi} \Sigma(\xi') \xi' d\xi' = 2\pi \Sigma_0 \frac{as}{s-a} \left(\sqrt{a^2 + \xi^2} - a - \sqrt{s^2 + \xi^2} s \right), \quad (2.36)$$

dalla quale è possibile ottenere il potenziale del lensing per integrazione:

$$\Psi(\xi) = 2G \int_{\xi}^{\xi_L} \frac{M_{2D}(\xi')}{\xi'} d\xi', \quad (2.37)$$

dove ξ_L è scelto opportunamente per ottenere un termine costante. Infine, l'angolo di deflessione è dato da

$$\alpha(\xi) = -\frac{2}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_S} \frac{d\Psi}{d\xi}. \quad (2.38)$$

2.0.2 Modelli ellittici

Di seguito sono discussi dei modelli di lente con una forma intrinsecamente ellittica.

Singular Isothermal Ellipsoid - SIE

È possibile generalizzare il caso della SIS ad un caso ellittico sostituendo

$$\xi \rightarrow \sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2}, \quad (2.39)$$

cosicché il profilo di densità superficiale assume la seguente forma:

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2}}. \quad (2.40)$$

Il profilo è costante su ellissi con asse minore ξ e asse maggiore ξ/f , dove $0 < f \leq 1$ è il rapporto tra gli stessi assi. Scegliendo ancora una volta l'Eq. 2.16 come scala di riferimento, si possono ricavare le proprietà del lensing anche per questo tipo di lenti, con la particolarità che in questo caso, non essendo irrilevante la direzione da cui osserviamo rispetto al centro della lente, è necessario usare le coordinate polari ed introdurre pertanto una fase ϕ :

- $\kappa(x, \phi) = \frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)}$ profilo di convergenza ²

² $\Delta(\phi) = \sqrt{\cos^2 \phi + f^2 \sin^2 \phi}$

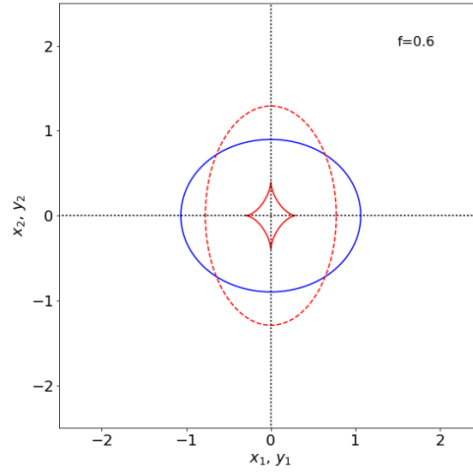


Figura 2.5: Linea critica tangenziale (tratteggiata rossa), linea caustica tangenziale (continua rossa) e cut (continua blu) per una lente SIE con $f = 0.6$.

- $\Psi(x, \phi) = x \frac{\sqrt{f}}{f'} \left[\sin \phi \sin^{-1}(f' \sin \phi) + \cos \phi \sinh^{-1} \left(\frac{f'}{f \cos \phi} \right) \right]$ potenziale del lensing ³
- $\alpha_1(x, \phi) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \sinh^{-1} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right)$ prima componente dell'angolo di deflessione
- $\alpha_2(x, \phi) = \frac{\sqrt{f}}{f'} \sin^{-1} \left(f' \sin \phi \right)$ seconda componente dell'angolo di deflessione
- $\gamma_1(x, \phi) = -\frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)} \cos 2\phi$ prima componente dello shear
- $\gamma_2(x, \phi) = -\frac{\sqrt{f}}{2x\Delta(\phi)} \sin 2\phi$ seconda componente dello shear
- $\lambda_t = 1 - 2\kappa(x, \phi)$ autovalore tangenziale
- $\lambda_r = 1$ autovalore radiale
- $\vec{x}_t = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} [\cos \phi, \sin \phi]$ linea critica tangenziale
- $y_{t,1}(\phi) = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} \cos \phi - \frac{\sqrt{f}}{f'} \sinh^{-1} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right)$ caustica tangenziale
- $y_{t,2}(\phi) = \frac{\sqrt{f}}{\Delta(\phi)} \sin \phi - \frac{\sqrt{f}}{f'} \sin^{-1}(f' \sin \phi)$
- $y_{c,1}(\phi) = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \sinh^{-1} \left(\frac{f'}{f} \cos \phi \right)$ cut
- $y_{c,2}(\phi) = -\frac{\sqrt{f}}{f'} \sin^{-1} \left(f' \sin \phi \right)$

Come per le lenti SIS anche le lenti SIE non hanno linee critiche radiali, dal momento che l'amplificazione radiale è sempre pari a uno. Il cut e la caustica intercettano gli assi y_1 ed y_2 in punti che sono simmetrici rispetto al centro della lente, vedi Fig. 2.5. Questi punti hanno coordinate:

$$s_{1,\pm,c} = [y_{c,1}(\phi = 0, \pi), 0] \quad s_{2,\pm,c} = [0, y_{c,2}(\phi = \pi/2, -\pi/2)] \quad (2.41)$$

³ $f' = \sqrt{1 - f^2}$

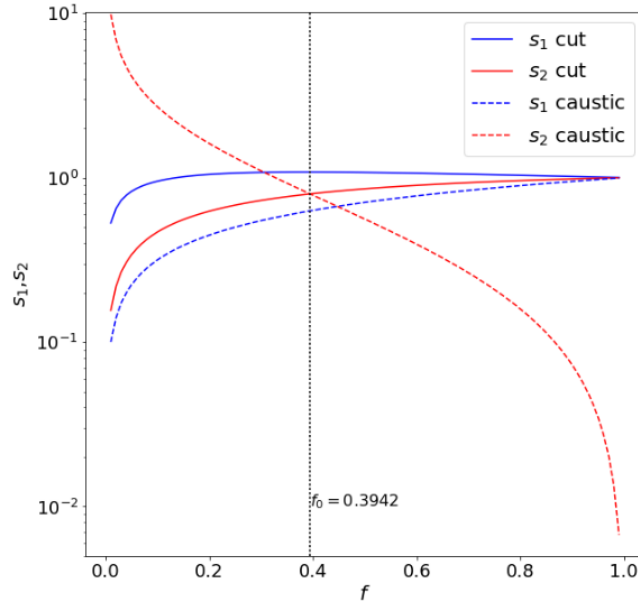


Figura 2.6: Intercette tra cut (linee continue) e caustiche (linee tratteggiate) con i semi-assi positivi y_1 e y_2 (rispettivamente linee blu e rosse) in funzione di f .

per il cut, e

$$s_{1,\pm,t} = [y_{t,1}(\phi = 0, \pi), 0] \quad s_{2,\pm,t} = [0, y_{t,2}(\phi = \pi/2, -\pi/2)] \quad (2.42)$$

per la caustica. In Fig. 2.6 osserviamo come le intercette s_1 ed s_2 variano al variare di f . $s_{1,c} > s_{1,t}$ per ogni valore di f , tuttavia, esiste un valore, $f = f_0 = 0.3942$, tale che

$$s_{2,c} \leq s_{2,t} \quad (f \leq f_0) \quad s_{2,c} > s_{2,t} \quad (f > f_0). \quad (2.43)$$

Inoltre, la caustica tangenziale non è sempre contenuta dal cut, per lenti molto ellittiche si estende oltre, così le cuspidi che non sono contenute all'interno del cut sono dette *nude*. Un esempio è il caso in Fig. 2.8.

Il mapping tra piano della lente e piano della sorgente per una lente SIE soddisfa a due importanti proprietà; vale la regola *destra-sinistra* se consideriamo il rapporto tra linee critiche e caustiche, oppure la regola della *diagonale* se consideriamo il rapporto tra linee critiche e cut. Per comprendere meglio queste due proprietà si faccia riferimento a Fig. 2.7, dove è fatto vedere come i quadranti sul piano della lente sono proiettati nei rispettivi quadranti sul piano della sorgente.

La molteplicità delle immagini che una lente SIE può produrre dipende dalla struttura delle caustiche e del cut e dalla posizione della sorgente relativamente a quest'ultima. Una sorgente esterna sia al cut che alle caustiche produce una sola immagine, il numero di immagini incrementa di uno spostandoci all'interno del cut, di due all'interno della caustica. La seconda e la terza regola non si escludono a vicenda e se la sorgente si trova sia all'interno della caustica che del cut, può produrre fino a 4 immagini; se si trova in una caustica nuda può produrre al massimo 3 immagini. Le sorgenti all'esterno del cut e della caustica hanno una sola immagine, localizzata nello stesso quadrante della sorgente. Quando la sorgente attraversa il cut, compare un'immagine al centro della lente. Man mano che la sorgente si avvicina alla caustica, l'immagine centrale si allontana dal centro della lente nel quadrante opposto rispetto a quello in cui la sorgente è proiettata, in accordo con la regola della diagonale. Quando è attraversata la caustica compaiono due altre immagini. Nel caso in cui una sorgente sia in prossimità di una *piega* nel primo quadrante del piano della sorgente, queste due immagini appaiono nel secondo quadrante del piano della lente,

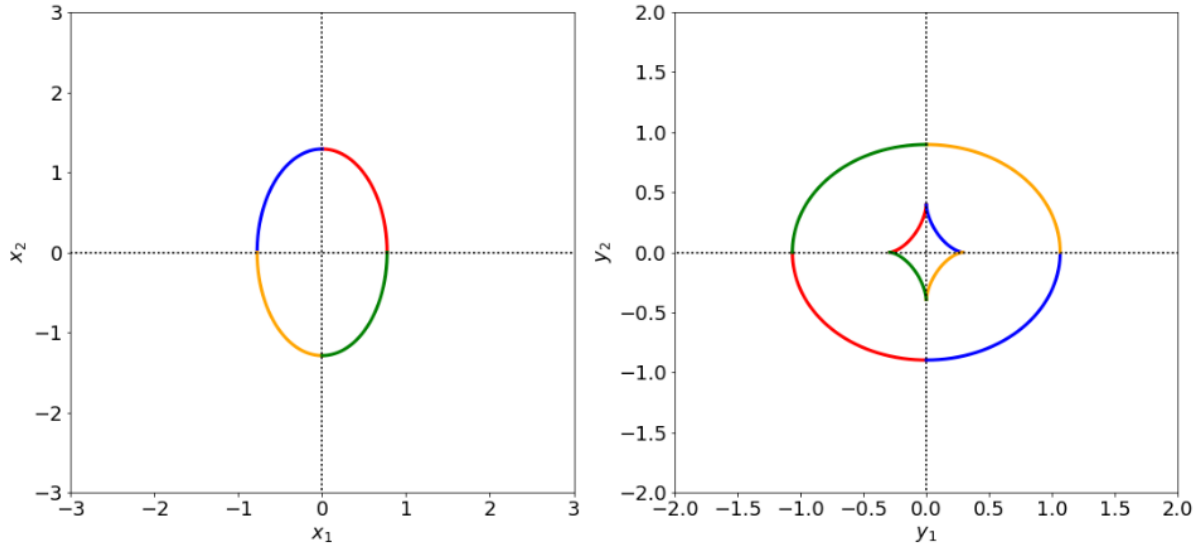


Figura 2.7: Proiezione dei punti sulle linee critiche nei rispettivi punti sulle caustiche. A differenti colori corrispondono differenti quadranti sul piano della lente. Il *mapping* è fatto vedere anche per il cut che diventerebbe la caustica radiale in presenza di un core.

in accordo con la regola destra-sinistra. Quando la sorgente è al centro della lente le immagini raggiungono una configurazione simmetrica detta *Croce di Einstein*. Se la sorgente si trova su una cuspidi, le tre immagini si fondono in un *arco gravitazionale*. In Fig. 2.8 un esempio di lente SIE dove una sorgente è fatta muovere dall'esterno verso il centro della lente, tramite i colori è possibile trovare un riscontro delle regole sopra citate.

A proposito della parità delle immagini, possiamo dire che è positiva fuori dalla linea critica e negativa altrove. Data la singolarità del potenziale del lensing vicino al centro della lente, le immagini sono minimi o punti di sella della corrispondente superficie di ritardo temporale; l'amplificazione vicino al centro della lente è nulla essendo il potenziale discontinuo.

Non singular Isothermal Ellipsoid - NIE

Anche in questo caso, in analogia alle lenti NIS, per risolvere il problema della singolarità nel potenziale delle lenti SIE, è possibile introdurre un core nel profilo di densità superficiale

$$\Sigma(\vec{\xi}) = \frac{\sigma_v^2}{2G} \frac{1}{\sqrt{\xi_1^2 + f^2 \xi_2^2 + \xi_c^2}}, \quad (2.44)$$

dal quale, adottando ancora una volta l'Eq. 2.16 come lunghezza scala, è possibile ricavare il profilo di convergenza:

$$\kappa(x) = \frac{\sqrt{f}}{2\sqrt{x_1^2 + f^2 x_2^2 + x_c^2}}. \quad (2.45)$$

A seconda del valore di f ed x_c , le lenti NIE possono avere o meno le linee critiche e caustiche. In Fig. ?? è possibile riscontrare che quando:

- $x_c < \frac{f^{3/2}}{2}$ ci sono sia le linee critiche che le caustiche; una caustica è tangenziale e ha quattro cuspidi, l'altra è radiale e non ha cuspidi. La caustica tangenziale è completamente contenuta all'interno della caustica radiale se f è grande (ellitticità piccola). Anche nel caso di ellitticità piccola, la caustica radiale contiene quella tangenziale, purché il core sia sufficientemente piccolo;

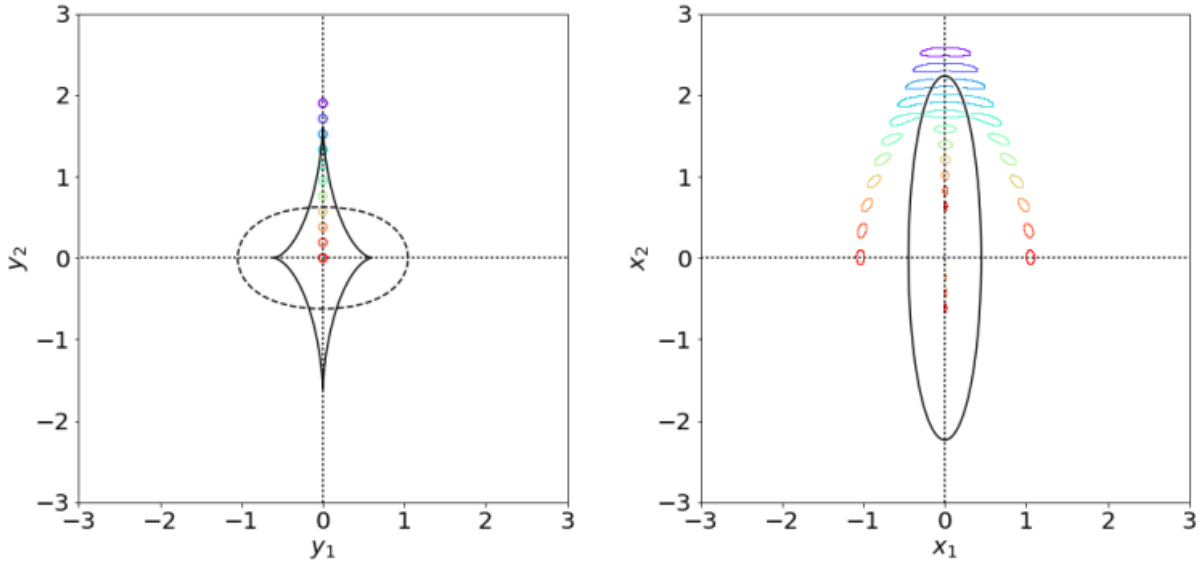


Figura 2.8: Lente SIE con $f = 0.2$ - Le diverse posizioni rispetto alla caustica e al cut sul piano della sorgente sono mappate sul piano della lente in accordo con le regole stabilite nella Sezione 2.0.2.

- $\frac{f^{3/2}}{2} < x_c < \frac{f^{3/2}}{1+f}$ la caustica radiale è contenuta all'interno della caustica tangenziale;
- $\frac{f^{3/2}}{1+f} < x_c < \frac{f^{1/2}}{1+f}$ ci sono solo le linee critiche e le caustiche tangenziali, quelle radiali scompaiono per $x_c = \frac{f^{3/2}}{1+f}$;
- $x_c > \frac{f^{1/2}}{1+f}$ non ci sono né linee critiche né caustiche.

Trovare le immagini multiple di una sorgente lensata da una lente NIE richiede l'utilizzo di metodi numerici. Anche per lenti di questo genere è possibile introdurre un'ellitticità nel potenziale ed avere delle lenti pseudo NIE.

2.0.3 Modelli pseudo-ellittici

Parlare di lenti ellittiche non implica parlare di lenti a forma ellittica, infatti l'ellitticità può essere introdotta nel potenziale della lente (come in Fig. 2.9) con la seguente sostituzione:

$$|\theta| \rightarrow \sqrt{\theta_1^2(1+\epsilon) + \theta_2^2(1-\epsilon)}. \quad (2.46)$$

Le lenti con potenziale ellittico non sono lenti ellittiche, infatti, le loro mappe di convergenza non hanno iso-contorni ellittici, piuttosto hanno una forma a *manubrio*, sono dette *pseudo Ellittiche* e possono produrre fino a 5 immagini multiple di una stessa sorgente. Introdurre grandi ellitticità nel potenziale può portare ad avere addirittura dei valori di convergenza negativi.

2.0.4 Modelli complessi

I casi studiati finora permettono di studiare il fenomeno del lensing con un approccio matematico limpido e scorrevole, purtroppo poco realistico. In generale è estremamente improbabile trovare delle lenti dotate di particolari simmetrie o prive di sotto-strutture. In questa sezione verranno discusse delle lenti il cui livello di complessità è maggiore rispetto ai casi finora trattati.

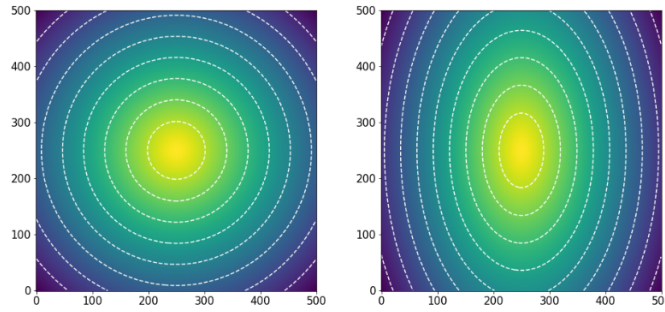


Figura 2.9: Esempio di potenziale del lensing prima e dopo l'aggiunta di un'ellitticità.

Lenti ottenute dalle simulazioni

Nella Sezione 1.2 abbiamo presentato i vari casi in cui è possibile calcolare l'angolo di deflessione, in particolare nella formula 1.9 è possibile vedere come il calcolo dell'angolo di deflessione è formalmente una convoluzione della densità superficiale $\Sigma(\vec{\xi})$ con la funzione *kernel*

$$\vec{K}(\vec{\xi}) \propto \frac{\vec{\xi}}{|\vec{\xi}|^2}. \quad (2.47)$$

Così facendo siamo in grado di calcolare l'angolo di deflessione nello spazio di Fourier come il prodotto della trasformata di Fourier della densità superficiale e dello stesso kernel:

$$\tilde{\alpha}_i(\vec{k}) \propto \tilde{\Sigma}(\vec{k}) \tilde{K}_i(\vec{k}), \quad (2.48)$$

dove \vec{k} è il coniugato di $\vec{\xi}$ nello spazio di Fourier e il simbolo \sim indica l'operazione di trasformata di Fourier. Il pedice $i \in [1, 2]$ indica le due componenti lungo i due assi sul piano della lente (α è un vettore). Questo calcolo può essere implementato usando l'algoritmo *Fast Fourier Transform* (Cooley & Tukey, 1995). Il calcolo dell'angolo di deflessione assume che l'integrazione sia estesa su un dominio infinito, mentre le lenti hanno una distribuzione di massa finita.

Il Fast Fourier Transform algorithm (FFT), detto anche algoritmo di Cooley-Tukey, è il più comune per il calcolo delle trasformate di Fourier. Questo algoritmo, in realtà, fu inventato da C. F. Gauss nel 1805, con l'obiettivo di interpolare le traiettorie dell'asteroide Pallade e del pianeta Giove, ma il suo lavoro non ebbe molto successo, essendo stato pubblicato solo postumo e in neolatino (Gauss, 1805). Tuttavia, Gauss non analizzò per ovvie ragioni l'aspetto computazionale in termini di tempo macchina. Tra il 19esimo e il 20esimo secolo ne furono proposte diverse varianti, ma divenne popolare solo dopo che i due scienziati, rispettivamente dell'IBM e di Princeton, lo *reinventarono*, descrivendo come sia possibile implementarlo efficientemente su un calcolatore. In Barnes & Hut (1986) fu fatto vedere come la trasformata di Fourier discreta di una sequenza di lunghezza N possa essere calcolata, scomponendola nella trasformata di Fourier di due lunghezze pari a $N/2$, permettendo di ridurre notevolmente il tempo di calcolo dell'Eq. 2.0.4 da $O(N^2)$ a $O(N \log N)$, qualora N fosse un numero eccessivamente grande. In letteratura sono riportati diversi algoritmi mirati a ridurre i problemi computazionali legati al calcolo dell'angolo di deflessione: (Aubert et al., 2007 ; Meneghetti et al., 2010).

Sottostrutture

Nella sezione 1.2 avevamo constatato che l'angolo di deflessione dipende linearmente dalla massa, questo ci consente di utilizzare il principio di sovrapposizione per combinare diverse lenti semplicemente combinando gli angoli di deflessione. Se si vogliono aggiungere delle sottostrutture

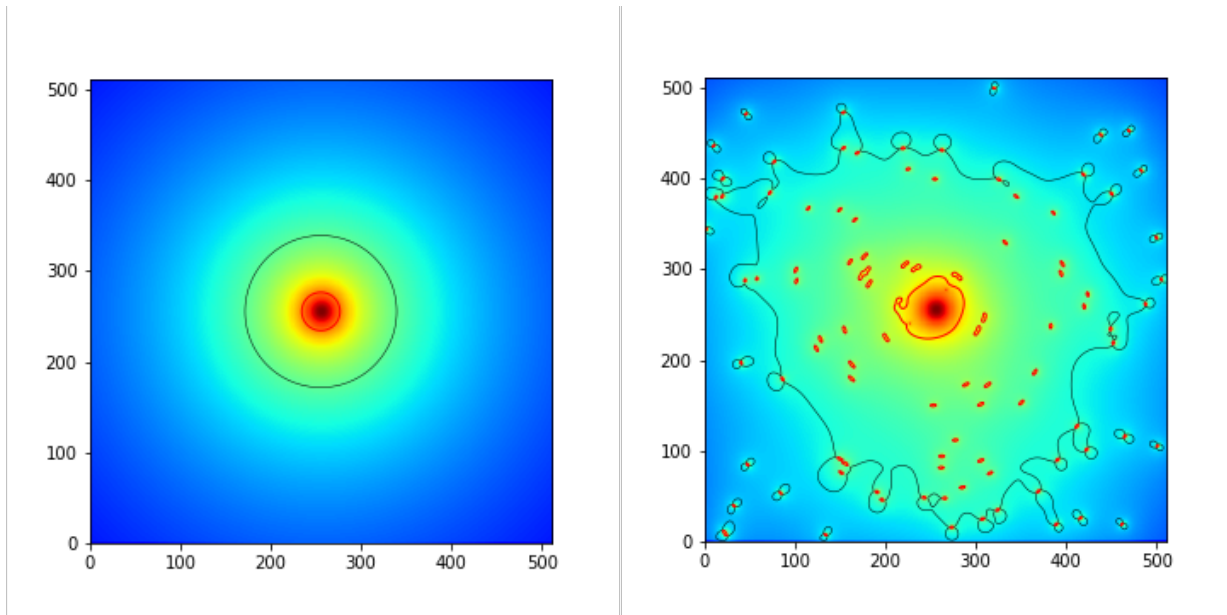


Figura 2.10: Nel pannello a sinistra la mappa di convergenza di una lente con profilo pSIEc. Nel pannello a destra la stessa lente con 100 sottostrutture aventi un profilo pSIE e distribuzione radiale casuale. Su entrambe le mappe di convergenza sono sovrapposte le linee critiche radiali (in rosso) e tangenziali (in nero).

all'interno della lente, come faremo successivamente per generare degli ammassi di galassie sintetici, è sufficiente sommare gli angoli di deflessione. In Fig. 2.10 si può vedere un esempio dove sono state aggiunte 100 sottostrutture con una distribuzione casuale e un profilo pSIE ad una lente principale con profilo pSIEc. È interessante notare come le linee critiche della lente principale siano deformate dalla presenza delle sottostrutture caratterizzate a loro volta da altre linee critiche. Inevitabilmente, questo implica la possibilità che una sorgente con un redshift maggiore di quello della lente possa essere sottoposta al lensing gravitazionale per via della massa delle nuove sottostrutture, aumentando così la molteplicità delle immagini prodotte sul piano della lente.

Capitolo 3

Lensing Gravitazionale da ammassi di galassie

L'esigenza di studiare gli ammassi di galassie nasce da tre questioni di cruciale importanza in astrofisica, ovvero: capire qual è la natura della materia oscura, come quest'ultima è legata ai barioni e il ruolo che gioca a livello cosmologico. Nel tentare di far luce su quanto detto, si sono riscontrati dei problemi cosmologici di non poco conto, quali ad esempio la non universalità degli aloni, nota anche come *cusp-core problem*, i cui profili risultano inconsistenti con profili *cuspy* come quello di Navarro, Frenk e White. Inoltre, i risultati delle simulazioni confrontati con le osservazioni hanno evidenziato delle inconsistenze note come *missing satellite problem* e *too big to fail problem*.

Il primo problema sottolinea il fatto che le simulazioni, in uno scenario Λ CDM, prevedono $\sim 5-20$ sottoaloni in più di quanti ne sono osservati in prossimità della Via Lattea; il secondo problema, invece, riguarda la loro massa, sono molto più massicci (~ 5 volte in più) rispetto a quelli osservati. Il *missing satellite problem* viene attenuato se si considera il contributo della fotoionizzazione UV dovuta alle esplosioni come quelle delle Supernove o i venti galattici, il *too big to fail problem* è ancora un caso aperto (Weinberg et al., 2015).

In questo capitolo verranno discusse le proprietà generali degli ammassi di galassie e il loro ruolo relativamente al fenomeno del lensing gravitazionale in regime forte.

3.1 Gli ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono le strutture cosmiche collassate e gravitazionalmente legate più massive dell'universo attuale ($M \geq 10^{14} M_{\odot}$). Con ogni probabilità si sono originati dai picchi più grandi del campo di densità primordiale e sono evoluti in seguito a svariati processi gravitazionali e idrodinamici. Studiando le simulazioni N-body si è giunti ad una teoria secondo la quale gli ammassi di galassie si formano in seguito ad una sequenza gerarchica di *merger* tra sistemi più piccoli, i quali potrebbero essere sopravvissuti fino ad oggi per formare le attuali popolazioni di sottostrutture. Originariamente, si pensava che gli ammassi di galassie fossero semplicemente delle concentrazioni spaziali di galassie, oggi invece si sa che quanto è evidente nell'ottico costituisce solo una minima parte della massa totale di un ammasso (Zwicky, 1933). Grazie all'astronomia X è stato scoperto che gli ammassi sono delle intense sorgenti di radiazione X emessa da un gas caldo ($T \sim 3 \cdot 10^7 K$) presente tutt'intorno alle galassie di cui sono composti. Questo gas intergalattico, detto *Intra Cluster Medium* (ICM), contiene più barioni delle stelle che formano le singole galassie, circa il 10 – 15% della massa totale di un ammasso. A partire dalle evidenze dinamiche delle galassie, passando per le proprietà di emissione della radiazione X e arrivando agli effetti del lensing gravitazionale, si hanno delle forti evidenze sul ruolo dominante che gioca

Property	Rich clusters	Poor Clusters (groups)
Richness	30-300 galaxies	3-30 galaxies
Radius	$(1 - 2) h^{-1} Mpc$	$(0.1 - 1) h^{-1} Mpc$
Radial velocity dispersion	$400 - 1400 km s^{-1}$	$100 - 500 km s^{-1}$
Radial vel. disp. (median)	$\sim 750 km s^{-1}$	$\sim 250 km s^{-1}$
Mass($r \leq 1.5h^{-1}Mpc$)	$(10^{14} - 2 \cdot 10^{15}) h^{-1}M_{\odot}$	$(10^{12.5} - 10^{14}) h^{-1}M_{\odot}$
Luminosity (B band)	$(6 \cdot 10^{11} - 6 \cdot 10^{12}) h^{-2}L_{\odot}$	$(10^{10.5} - 10^{12}) h^{-2}L_{\odot}$
Mass-to-light ratio	$300 hM_{\odot}/L_{\odot}$	$200 hM_{\odot}/L_{\odot}$
Cluster number density	$(10^{-5} - 10^{-6}) h^3 Mpc^{-3}$	$(10^{-3} - 10^{-5}) h^3 Mpc^{-3}$
Correlation scale	$(22 \pm 4)h^{-1}Mpc$	$(13 \pm 2) h^{-1}Mpc$

Tabella 3.1: Proprietà tipiche degli ammassi di galassie stabilite da Abell nel 1958 mentre compilava il primo catalogo. *Radius* si riferisce alla concentrazione principale di galassie, ovvero, il raggio oltre il quale la densità superficiale delle galassie arriva a $\approx 1\%$ della densità centrale del core (Bahcall, 1999).

la materia oscura in queste strutture cosmiche, circa l'80 – 85% della massa totale. Date le loro peculiarità, gli ammassi di galassie sono dei laboratori ideali per studiare le interazioni tra galassie, oltre alle implicazioni cosmologiche di cui parleremo a breve.

3.1.1 Classificazione morfologica

Le principali proprietà osservative degli ammassi di galassie sono raccolte in Tab. 3.1, organizzata secondo quelli che sono i parametri necessari per distinguere un *ammasso* da un *gruppo*.

Dal punto di vista morfologico gli ammassi di galassie sono classificati in base alla loro distribuzione spaziale. In realtà, sono usati diversi modi per classificarli. Uno è quello illustrato in Fig. 3.1, che si basa semplicemente sull'impatto visivo di un ammasso osservato nell'ottico. Una

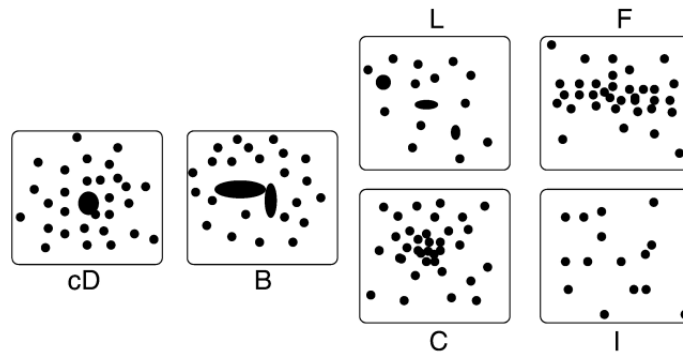


Figura 3.1: Classificazione morfologica degli ammassi di galassie secondo (Rood & Sastry, 1971): **cD** sono dominati al centro da galassie cD (central dominant); **B** contengono una coppia di galassie molto luminose al centro; **L** sono ammassi con allineamenti relativi alla galassia dominante; **C** hanno un unico core di galassie; **F** sono dei cluster con una distribuzione di galassie oblate; **I** sono quelli irregolari.

classificazione di questo tipo può darci un'idea dello stato dinamico di un ammasso, in equilibrio o in fase di merger ad esempio. A grandi linee si può distinguere tra ammassi regolari, irregolari o intermedi. Gli ammassi regolari sono *compatti*, al contrario di quelli irregolari che sono *aperti*. Questa classificazione morfologica sottolinea le differenze tra i vari ammassi tramite una correlazione tra la loro morfologia e le altre proprietà fisiche. Ad esempio, le osservazioni sono concordi

nel dire che gli ammassi regolari sono completamente dominati dalle galassie Early Type (ETG), mentre quelli irregolari hanno una percentuale di galassie a spirale simile a quella delle galassie di campo (Schneider, 2006). Molto spesso, gli ammassi regolari sono dominati da galassie centrali e la loro densità galattica al centro è molto alta. Contrariamente a ciò, gli ammassi irregolari sono significativamente meno densi al centro, da cui deduciamo che i regolari sono molto ricchi, mentre, gli irregolari sono abbastanza poveri di galassie. Dal punto di vista fisico questo concetto porta a concludere che i primi sono in uno stato *rilassato*, mentre i secondi sono ancora in fase di *evoluzione*. Generalmente la classificazione in rilassati e non si basa sulla morfologia X (Meneghetti et al., 2014). Sulla base di una serie dei criteri comunemente utilizzati in letteratura, seguendo l'approccio di (Neto et al., 2007), gli aloni ottenuti dalle simulazioni si classificano in rilassati e non rilassati a seconda che questi soddisfino alle seguenti proprietà:

- $s = (r_{cm} - r_\phi)/r_{vir} < 0.07$, dove s è lo spostamento del centro di massa, definito come l'*offset* tra il centro di massa r_{cm} (determinato usando tutte le particelle all'interno del raggio viriale) e il minimo del potenziale r_ϕ in unità del raggio viriale r_{vir} ;
- $r_{vir} = 2T/|U| < 1.35$, dove T è l'energia cinetica e U l'energia potenziale gravitazionale;
- $f_{sub} < 0.1$, ovvero la frazione di massa delle sottostrutture, calcolata come numero di sottostrutture risolte entro un certo raggio viriale è minore del 10%.

3.1.2 Cinematica

La cinematica delle galassie negli ammassi può essere utilizzata per dedurre la massa totale. Il teorema del viriale stabilisce che, per un oggetto gravitazionalmente legato, l'energia cinetica K e la sua energia potenziale U sono legate dalla relazione $2K + U = 0$. Nel caso di un ammasso con massa M e raggio R , l'energia cinetica può essere scritta in termini di dispersione della velocità delle singole componenti, cioè

$$K \sim \frac{1}{2} M \sigma_v^2 \quad (3.1)$$

e l'energia potenziale totale come

$$U \sim -\frac{GM^2}{R}. \quad (3.2)$$

Dalle precedenti equazioni segue una relazione abbastanza semplice (Rosati et al., 2002) tra la massa dell'intero sistema, le sue dimensioni e la dispersione di velocità delle galassie, ovvero

$$M \sim \frac{R \sigma_v^2}{G} \sim \left(\frac{R}{1h^{-1}Mpc} \right) \left(\frac{\sigma_v}{10^3 km/s} \right)^2 10^{15} h^{-1} M_\odot. \quad (3.3)$$

Utilizzando Eq. 3.3 la massa totale di un ammasso è stimata dalle misure della dispersione di velocità delle galassie di cui è composto.

3.1.3 Intra Cluster Medium

Come accennato sopra, lo spazio all'interno di un ammasso di galassie è permeato da un plasma ad alta temperatura che emette radiazione X per effetto *bremstrahlung*¹. Se si assume che il gas sia in equilibrio idrostatico, vale la seguente relazione:

$$\nabla P = -\rho_{gas} \nabla \phi(r), \quad (3.4)$$

¹L'interazione coulombiana tra gli ioni e gli elettroni in un plasma caldo e otticamente sottile provoca una deflessione e quindi la decelerazione di quest'ultimi con conseguente emissione di radiazione detta di frenamento (*bremstrahlung*). Se il gas è in equilibrio termico l'energia media di tutte le particelle è la stessa ed è determinata solo dalla temperatura T , mentre le loro velocità seguono la distribuzione di Maxwell-Boltzmann.

dove P è la pressione, che nel caso di un gas ideale è uguale a

$$P(r) = \rho_{gas} \frac{kT_g(r)}{\mu m_p}, \quad (3.5)$$

dove k è la costante di Boltzmann, $\mu \simeq 0.63$ il peso atomico medio, m_p la massa del protone e $\phi(r)$ il potenziale gravitazionale del cluster. Specificando il potenziale nell'Eq. 3.4 si ha

$$\frac{1}{\rho_{gas}} \frac{dP}{dr} = -\frac{d\phi(r)}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2}. \quad (3.6)$$

Sostituendo Eq. 3.5 in Eq.3.6 si ottiene il profilo della massa gravitazionale entro il raggio r :

$$M(< r) = -\frac{kT_g(r)r}{\mu m_p G} \left[\frac{d \ln(\rho_g(r))}{d \ln r} + \frac{d \ln(T_g(r))}{d \ln r} \right] \quad (3.7)$$

con $\rho_g(r)$ e $T_g(r)$ che sono rispettivamente i profili di densità e temperatura del gas in funzione della distanza dal centro dell'ammasso.

Nel caso di una sfera isoterma, il profilo di densità volumetrica è dato da

$$\rho_g(r) = \rho_0 \left[1 + \left(\frac{r}{r_{core}} \right) \right]^{-\frac{3}{2}\beta} \quad (3.8)$$

dove r_{core} è preso come raggio scala dell'oggetto osservato e ρ_0 la densità centrale, mentre, il profilo di brillantezza superficiale proiettato al raggio b è il seguente

$$I(b) = I_0 \left[1 + \left(\frac{b}{b_{core}} \right) \right]^{\frac{1}{2}-3\beta}, \quad (3.9)$$

dove σ_r è la dispersione di velocità delle galassie lungo la linea di vista. Le ultime relazioni ci autorizzano a prendere $r_{core} \simeq b$, quindi tenendo conto che

$$\beta = \frac{\sigma_r^2}{kT/\mu m_p}. \quad (3.10)$$

l'auto consistenza del modello (detto β -model) (Cavaliere & Fusco-Femiano, 1978), permettete di riscrivere Eq. 3.7 come:

$$M(< r) = -\frac{kr^2}{G\mu m_p} \left[\frac{3\beta rT}{r^2 + r_{core}^2} - \frac{dT}{dr} \right]. \quad (3.11)$$

In sintesi, partendo dal profilo di temperatura del gas di un ammasso di galassie, è possibile ottenere il profilo di massa dello stesso. In casi come quello dell'ammasso della Coma, si trova che il contributo del gas è pari al 10% circa della massa totale (Merritt, 1987).

Stelle nell'Intra Cluster Medium

L'intracluster medium è anche popolato da stelle (Schneider, 2006). A primo acchito questo dato stupisce perché, in generale, la teoria sulla formazione stellare prevede che le stelle debbano formarsi solo in delle nubi molecolari molto dense e non nello spazio intergalattico. La ragione di questo potrebbe risiedere nei fenomeni di *stripping* che avvengono tra le galassie nel corso delle loro interazioni gravitazionali. Il destino di queste stelle è dunque comparabile a quello del mezzo interstellare negli ammassi omonimi, i quali sono arricchiti di metalli in seguito ai processi di formazione stellare. L'osservazione di una luce ottica diffusa negli ammassi è estremamente difficile ed è possibile approcciarsi al suo studio solo tramite tecniche statistiche i cui risultati

sono concordi con una legge simile a quella di *de Vaucouleurs* per le galassie. Da queste analisi emerge che nelle regioni interne degli ammassi, la distribuzione della luce va come $r^{-1/4}$, mentre, per raggi più grandi ($\sim 50kpc$), il profilo di brillantezza differisce da quello precedente detto di *de Vaucouleurs*; questo può essere considerato in seno all'esistenza di galassie cD, definite dallo stesso eccesso di luce (Schneider, 2006). La separazione tra la componente di luce diffusa ed il profilo di brillantezza delle cD non è molto chiara, ma, a grandi distanze dal centro dell'ammasso, si può escludere la possibilità che le stelle siano gravitazionalmente legate alle galassie centrali. Tuttavia, la componente diffusa delle stelle individuali è stata rilevata nelle periferie dell'ammasso e non si è ben capito a cosa sia legata. Essa tiene conto di circa il 10% della luce ottica totale, ma, i modelli di evoluzione galattica dovranno dare una spiegazione migliore per giustificare adeguatamente le osservazioni.

3.1.4 Effetto Sunyaev-Zeldovich - cenni

Gli elettroni nel gas caldo del mezzo intracluster possono scatterare i fotoni freddi della CMB. Lo spessore ottico è dunque la probabilità che avvenga ciò è relativamente bassa, ma l'effetto è osservabile ed è di grande importanza per l'analisi degli ammassi di galassie. Un fotone che si muove attraverso un ammasso di galassie se subisce uno scatter cambierà direzione, inoltre la sua energia totale cambierà leggermente, così che la sua frequenza aumenta dopo lo scattering. Dunque, per via dello scattering Compton, l'energia si trasferisce dagli elettroni ai fotoni e lo spettro della CMB risulta modificato, come si può vedere in Fig. 3.2. Questo effetto, chiamato di Sunyaev-Zeldovich, è stato previsto nel 1970 (Sunyaev & Zeldovich, 1970) ed è stato osservato per diversi ammassi di galassie. Lo spettro della CMB, misurato nella direzione di un ammasso, differisce dallo spettro di Planck; l'intensità dell'effetto dipende dalla temperatura del gas del cluster e dalla sua densità. L'osservazione dell'effetto SZ costituisce un'altra risorsa per analiz-

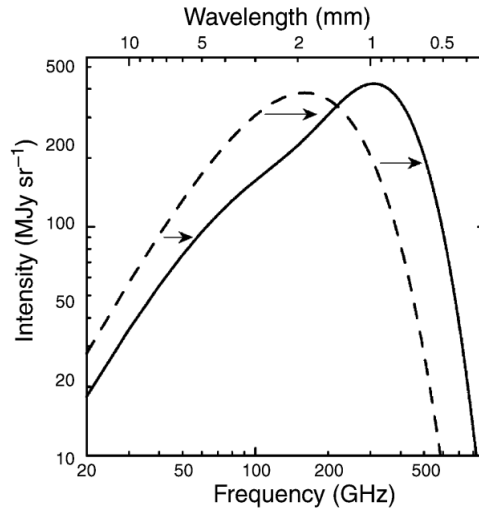


Figura 3.2: Distorsione delle spettro della CMB causato dall'effetto Sunyaev-Zeldovich. La curva tratteggiata rappresenta la distribuzione di Planck imperturbata, la curva continua è la stessa distribuzione dopo che la radiazione ha attraversato una nube di elettroni.

zare il gas negli ammassi di galassie. A lungo è stato considerato il principale strumento per la misura delle distanze degli ammassi di galassie e da queste della costante di Hubble. L'effetto SZ, combinato all'emissione X, ci consente di determinare la distanza di un ammasso, dal momento che il cambio d'intensità della CMB dipende dall'estensione del cluster lungo la linea di vista L :

$$\frac{\Delta_\nu}{I_\nu} \propto n_e L T_g \quad (3.12)$$

dove n_e è la densità elettronica e T_g la temperatura del gas.

3.1.5 Profili di densità della materia oscura

La materia oscura è la componente principale degli ammassi di galassie, cinque volte più abbondante della materia ordinaria. È introdotta per dare una spiegazione a molti effetti gravitazionali indipendenti su diverse scale astronomiche. Una completa comprensione della materia oscura richiede il coinvolgimento di parecchie branche della fisica. La sua comparsa durante l'espansione calda dell'universo è giustificata tramite la meccanica statistica e la termodinamica. La fisica delle particelle cerca di andare oltre il modello standard e propone diversi candidati, esplorando le possibili e debolissime interazioni con la materia ordinaria. Probabilmente si tratta di particelle con una sezione d'urto molto piccola e con una natura diversa da quelle che tipicamente compongono un gas. La sola interazione di cui siamo a conoscenza è quella gravitazionale, dal momento che la sua energia può essere convertita esclusivamente da potenziale a cinetica. La relatività generale, l'astrofisica e la cosmologia spiegano come questa componente agisca sull'universo su ogni scala. Numerose missioni negli ultimi decenni hanno dato inizio a quella che è nota come era della *cosmologia di precisione*, tuttavia la materia oscura rimane uno dei più grandi misteri dell'universo e ad oggi le simulazioni rimangono uno dei migliori strumenti per avanzare ipotesi sulla sua natura (Garrett & Dūda, 2011).

Le simulazioni mostrano che i profili degli aloni sono descritti abbastanza bene dal modello di Navarro Frenk e White presentato nel paragrafo 2.0.1. In questa sezione vengono brevemente accennati un modello generalizzato e uno complementare a quello di NFW. L'esigenza di definire un profilo NFW generico nasce dal dibattito molto ampio che esiste in letteratura circa la pendenza interna del profilo di densità delle strutture cosmiche. L'avvento dei moderni supercomputer consente di raggiungere risoluzioni in termini spaziali e di massa senza precedenti. Come si può vedere in Fig. 3.3 le simulazioni sono concordi nell'affermare che c'è un notevole *scatter* tra le molteplici forme dei profili di densità dei differenti cluster e quello precedentemente proposto da Navarro Frenk White. La ragione di tutto ciò potrebbe risiedere nel ruolo che gioca l'energia

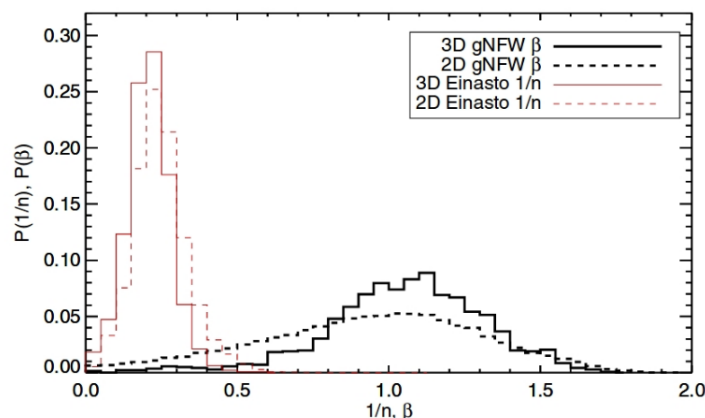


Figura 3.3: Distribuzione delle *slope* interne ottenute dalle analisi condotte in (Meneghetti et al., 2014) su profili gNFW ed Einasto per diversi valori di β ed $1/n$.

oscura nell'influencare la formazione e lo sviluppo delle strutture cosmiche agendo direttamente sulla crescita lineare delle fluttuazioni di densità della materia (Balmès et al., 2014).

Profilo di Navarro Frenk White generalizzato

Si tratta di una versione generalizzata del NFW classico detta gNFW, grazie alla quale i profili possono essere resi più o meno *ripidi*:

$$\rho(r) = \frac{\rho_s}{\left(\frac{r}{r_s}\right)^\beta \left(1 + \frac{r}{r_s}\right)^{3-\beta}}. \quad (3.13)$$

Analogamente al profilo di NFW, anche quello gNFW può essere definito un parametro di concentrazione $c = c_{vir}/(2 - \beta)$.

Dal punto di vista osservativo, l'analisi condotta da (Newman et al., 2011) sull'ammasso Abell 383 ha fatto vedere che la pendenza interna del profilo di densità presenta $\beta < 1$ con un livello di confidenza del 95%. (Sand et al., 2004) hanno trovato una pendenza consistente con $\beta \sim 0.52$ e inconsistente con $\beta \geq 1$, dallo studio di un campione di sei ammassi. In altri lavori come (Newman et al., 2011) è stato trovato $\beta > 1$.

Profilo di Einasto

Nel caso degli aloni che non si trovano in equilibrio, il NFW (o il gNFW) dà una descrizione troppo semplicistica dei profili di densità, mentre altre funzioni come il profilo di *Einasto* potrebbero dimostrarsi più flessibili:

$$\rho(r) \propto \exp\left[-2n \left[\left(\frac{r}{r_{-2}}\right)^{1/n} - 1\right]\right]. \quad (3.14)$$

Si faccia riferimento a (Merritt et al., 2006) per approfondire la questione.

3.2 Lensing da ammassi di galassie

Gli ammassi di galassie sono le più potenti lenti gravitazionali nell'universo. Sono osservabili due regimi di lensing: forte e debole.

- Gli effetti del lensing forte negli ammassi di galassie si manifestano sotto forma di insiemi di immagini multiple, separate anche da decine di arcosecondi oppure di grandi archi gravitazionali (Fig. 3.4 e 3.5) come quello studiato in (Rivera-Thorsen et al., 2017). In letteratura sono riportati anche casi di lensing forte che coinvolgono QSOs o SNe. Come vedremo meglio nella Sez. ?? questi eventi sono particolarmente rilevanti per misurare i parametri cosmologici. Pertanto gli ammassi sono dei laboratori senza uguali per testare l'effetto lente gravitazionale. Con essi si ha a disposizione una lente che agisce su più sorgenti aumentando la probabilità di osservare delle immagini multiple. Come vedremo, il vantaggio principale di tutto ciò sono i vincoli astrometrici sensibili alla cosmologia.
- Nel caso di lensing debole non si osservano forti distorsioni delle sorgenti o delle immagini multiple vere e proprie. Tuttavia studiare gli effetti del lensing in regime debole completa l'informazione che proviene dal lensing forte, in particolare nella fase in cui si cerca di costruire un modello corretto del profilo di densità superficiale. Riguarda una regione di cielo molto piccola (circa 1 arcominuto) e per realizzare delle misure in questo regime si usano i concetti di lensing al primo ordine.

Si faccia riferimento alla Fig. 3.6 per avere una visione globale di quanto appena detto.

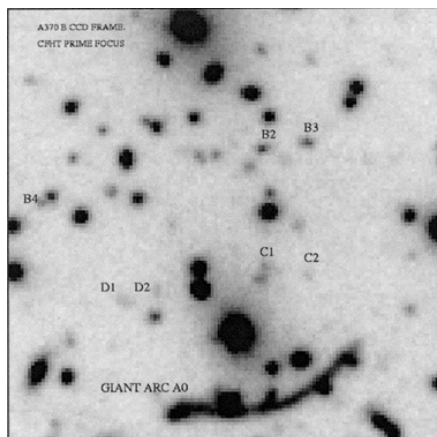


Figura 3.4: Prima immagine relativa all'arco gravitazionale scoperto in A370 catturata con CFHT (Canada France Hawaii Telescope). L'arco si estende per più di $25''$ ed è generato dalla fusione di tre immagini multiple relative ad una sorgente posta a $z = 0725$. In Fig. 3.5 si può apprezzare lo stesso ammasso osservato con HST (Hubble Space Telescope).



Figura 3.5: Abell 370 osservato da HST. Si noti come il progresso tecnologico abbia portato da un'immagine come quella in Fig. 3.4 a quella riportata in questo pannello.

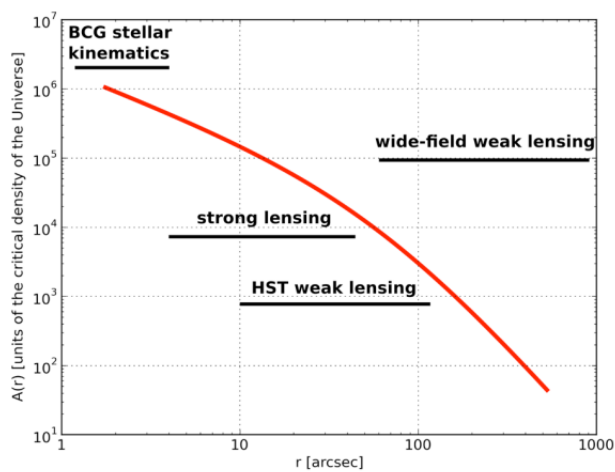


Figura 3.6: $A(r)$ è la convergenza in unità di densità critica dell'universo. Dal suo andamento si può capire quali sono le scale a cui dominano i diversi regimi del lensing gravitazionale.

3.2.1 Cenni storici e stato dell'arte

- Nei suoi studi sugli ammassi di galassie Zwicky comprese che questi possono essere delle lenti gravitazionali molto forti e che possono dar luogo ad immagini multiple con una separazione angolare rilevabile. Inoltre notò che l'osservazione di lenti galattiche, oltre a dare un ulteriore sostegno alla teoria della Relatività Generale, permette l'osservazione di oggetti altrimenti invisibili, grazie all'amplificazione gravitazionale della luce (Zwicky, 1933). In questo modo si può anche ottenere una stima diretta e precisa della massa di una galassia che funge da lente gravitazionale.
- Già a partire dagli anni 70 furono condotte una serie di *survey* mirate alla ricerca di lenti gravitazionali extragalattiche; queste portarono alla scoperta del Quasar sottoposto a lensing forte di cui abbiamo parlato nell'introduzione del Cap. 1 (Walsh et al., 1979), dimostrando definitivamente l'osservabilità del fenomeno.
- Nel 1985 lo spettrografo PUMA operava per la prima volta nel fuoco del telescopio CFHT (Canada France Hawaii Telescope) per studiare lo stato dinamico degli ammassi di galassie con la speranza di osservare dei Quasar debolmente amplificati dagli stessi. Una strana struttura a forma di anello comparve nel CCD che analizzava l'ammasso A370 ($z = 0.374$) (vedi Fig. 3.4). Fu immediatamente pubblicato un articolo per attirare l'attenzione su questa struttura esotica (?).
- Indipendentemente Lynds & Petrosian (1986) pubblicarono sul Bulletin of the American Astronomical Society la scoperta di un arco in A370, A2218 e Cl2244-02. Lynds e Petrosian rispolverarono alcune precedenti osservazioni di strutture a forma di arco. Tuttavia, sembrava che nessuno avesse mai condotto una survey sistematica per cercare tali archi, probabilmente si pensava che i core degli ammassi più ricchi non potessero raggiungere una densità di materia superficiale proiettata abbastanza grande da *separare* le immagini di sorgenti distanti.
- L'attenzione della comunità scientifica era focalizzata sul problema dell'evoluzione dinamica e fotochimica degli ammassi di galassie. Prima dell'avvento dei CCD, la brillantezza superficiale molto debole di questi archi li ha resi quasi inosservabili. Contemporaneamente alla riscoperta degli archi, pochi astronomi erano pronti ad accettare l'ipotesi del lensing gravitazionale, in particolare per via dell'assenza di una controimmagine, come ci si aspettava nel caso di una lente con simmetria circolare.
- Fu Paczynski nel 1987 che per primo avanzò l'ipotesi che la presenza di archi nei core di densi ammassi di galassie, la loro simmetria circolare, il loro colore blu e la debole brillantezza superficiale fossero delle prove schiaccianti circa il fatto che quello osservato era un fenomeno prodotto da lensing gravitazionale (Paczynski, 1987).
- Quasi immediatamente Kovner (1987) intuì che il core di un cluster può agire come lente ed è possibile riprodurre l'arco osservato in A370 adottando un potenziale ellittico.
- Quando ? diedero conferma che il redshift dell'arco in A370 era superiore a quello dell'ammasso, dimostrarono che si trattava di un evento di lensing gravitazionale forte.
- Una survey degna di nota è stata CLASS (Cosmic Lens All-Sky Survey), un progetto internazionale il cui obiettivo era la ricerca di lenti gravitazionali nella banda radio. Condotta tra il 1990 e il 1999 ha monitorato 16.503 sorgenti sorgenti FSRQ (Flat Spectrum Radio

Quasar)². La semplicità di queste sorgenti consiste nel fatto che ogni FSRQ con una struttura estesa è una possibile lente gravitazionale, dal momento che la sua estensione potrebbe essere costituita dalle immagini multiple di una sorgente radio puntiforme, prodotte dal campo gravitazionale di un'altra galassia. I risultati collezionati da CLASS sono dodici sistemi doppi, nove sistemi quadrupli, un eccezionale sistema sestuplo e altre quattro lenti prive di una conferma spettroscopica. Oggetti come un sistema sestuplo sono estremamente rari, basti pensare che ne sono stati scoperti solo due. Studiando questi sistemi in dettaglio è emerso che la statistica di produzione delle immagini multiple ha un perché che risiede nella morfologia dei vari modelli di lente. Se le future missioni riuscissero a trovare un sistema sestuplo che coinvolga una sorgente variabile, si avrebbe tra le mani uno strumento cosmologico senza eguali. Vedi (Dahle et al., 2013).

- SLACS (Sloan Lens ACS survey), un progetto che ha raccolto dati fotometrici e spettroscopici su una porzione di cielo di 8.400 gradi quadrati. Le osservazioni sono state condotte tra il 2000 e il 2005 e tra il 2005 e il 2009 utilizzando il telescopio da 2.5m di diametro ad Apache Point in New Mexico. Lo scopo era l'osservazione di galassie il cui spettro è molto difficile da *fit* con un singolo spettro, pertanto, l'unica spiegazione è quella che ci sia una sovrapposizione di due galassie lungo la linea di vista. Una ETG (Early Type Galaxy) è caratterizzata da una SED (Spectral Energy Distribution) priva di righe di emissione. Se fa da lente ad una SFG (Star Forming Galaxy) ad alto redshift il suo spettro sarà caratterizzato da diverse righe in emissione che non ci si aspetta. SLACS ha catalogato 85 lenti accertate e 13 probabili; l'80% di esse sono ellittiche e il restante 20% lenticolari o spirali in egual misura (www.SLACS.org).
- Al giorno d'oggi il migliore strumento per osservare fenomeni di lensing forte sia in galassie, sia in ammassi di galassie è il telescopio spaziale Hubble, che ha prodotto recentemente osservazioni profonde nelle regioni centrali di diversi ammassi di galassie nell'ambito di alcuni programmi osservativi pluriennali come CLASH (Cluster Lensing And Supernova survey with Hubble) e HFF (Hubble Frontier Fields).

La prima è una survey realizzata con Hubble, un programma da 524 orbite multi-cycle che sfrutta le proprietà di lensing gravitazionale di 25 ammassi di galassie per porre vincoli accurati circa la loro distribuzione di massa. La survey ha come obiettivo ultimo quello di determinare il grado di concentrazione della materia oscura nei core degli ammassi di galassie. La forte amplificazione offerta dalle proprietà del lensing, in alcuni casi, provvede ad una risoluzione angolare non ottenibile per altre vie. Le osservazioni di ciascun cluster distribuite su otto epoche e parallelamente su più campi di vista, mirano alle SN Ia a $z > 1$ per migliorare i vincoli cosmologici relativi alla dipendenza temporale dell'equazione di stato dell'energia oscura e all'evoluzione di questo tipo di sorgenti in un'epoca in cui l'universo è dominato dalla materia (Postman et al., 2012).

La seconda survey, HFF, ha come obiettivo le galassie ad alto redshift molto deboli. FF combina la potenza di HST e Spitzer a quella dei telescopi gravitazionali esistenti in natura, cioè gli ammassi di galassie. Sei ammassi in particolare (Abell 2744, MACSJ0416.1-2403, MACSJ0717.5+3745, MACSJ1149.5+2223, AbellS1063 e Abell 370) sono stati studiati nel dettaglio tramite le camere HSTACS/WFC e WFC3/IR per oltre 840 orbite; un paio di essi saranno discussi nel Cap. ?? perché utilizzati al fine di realizzare delle simulazioni quanto più realistiche possibile. Alcune galassie, in background rispetto a questi ammassi, hanno subito fattori di amplificazione di un fattore 10-100 e in piccoli volumi di universo

²I FSRQ sono Quasar con una struttura radio molto semplice, in genere puntiformi ed occasionalmente emettono, seppur debolmente, nel visibile.

si è arrivati a magnitudini 30-33. Per approfondire la questione si faccia riferimento a [Lotz et al. \(2017\)](#).

3.2.2 Sezione d'urto di un ammasso di galassie

L'efficienza di un ammasso di galassie nel produrre eventi di lensing gravitazionale con determinate proprietà può essere quantificata tramite la sua sezione d'urto. Per sezione d'urto di un ammasso si intende l'area sul piano della sorgente entro cui si deve trovare un QSO, una galassia o qualsiasi sorgente per subire un effetto di lensing forte. L'area di cui parliamo corrisponde a quella contenuta all'interno delle caustiche sul piano della sorgente. La sezione d'urto dipende dalla massa, dalla concentrazione e dal livello di sottostrutture della lente ([Meneghetti et al., 2010](#)). Anche la triassialità e l'orientamento sono dei fattori rilevanti, perché gli ammassi visti lungo il loro asse maggiore rappresentano delle lenti più efficienti ([Oguri & Keeton, 2004](#)). Generalmente, per ammassi con $M_{200} \gtrsim 7 \cdot 10^{14} M_{\odot}$, la sezione d'urto è sufficientemente grande da far sì che diverse sorgenti possano subire simultaneamente effetti di lensing forte. La sezione d'urto del lensing è sensibile a parecchie proprietà della lente e dipende dai parametri cosmologici e dai rispettivi redshift di lente e sorgente. Se includiamo tutte le proprietà rilevanti di una lente in un vettore di parametri \mathbf{p} e i parametri cosmologici in un altro vettore \mathbf{c} , allora il numero di eventi aspettati si può esprimere tramite la seguente formula:

$$N(\mathbf{p}, \mathbf{c}, z_l) = \int_{z_l}^{\infty} \sigma(\mathbf{p}, \mathbf{c}, z_l, z_s) n(z_s) dz_s, \quad (3.15)$$

dove z_s e z_l sono rispettivamente i redshift della sorgente e della lente e σ la sezione d'urto del lensing. Qualora la sezione d'urto venisse misurata per diversi piani della sorgente posti ad altrettanti redshift, bisognerebbe riscalarle le mappe di convergenza e dello shear, fondamentali per il calcolo delle linee critiche e caustiche, per un fattore pari a:

$$\frac{D_S}{D_{LS}}(z_s = z_{norm}) \frac{D_{LS}}{D_S}(z_s = z_{source}). \quad (3.16)$$

Bibliografia

- Aubert, D., Amara, A., & Metcalf, R. B. 2007, Monthly Notices of the RAS, 376, 113, doi: [10.1111/j.1365-2966.2006.11296.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2006.11296.x) 24
- Bahcall, N. A. 1999, in American Astronomical Society Meeting Abstracts, Vol. 195, 130.03 28
- Balmès, I., Rasera, Y., Corasaniti, P.-S., & Alimi, J.-M. 2014, Monthly Notices of the RAS, 437, 2328, doi: [10.1093/mnras/stt2050](https://doi.org/10.1093/mnras/stt2050) 32
- Barnes, J., & Hut, P. 1986, 324, 446, doi: [10.1038/324446a0](https://doi.org/10.1038/324446a0) 3, 24
- Bartelmann, M. 1996, Astronomy and Astrophysics, 313, 697. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/9602053> 17
- Bartelmann, M., & Schneider, P. 2001, Weak gravitational lensing, Vol. 340, 291–472, doi: [10.1016/S0370-1573\(00\)00082-X](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00082-X) 4
- Cavaliere, A., & Fusco-Femiano, R. 1978, Astronomy and Astrophysics, 70, 677 30
- Cooley, J. W., & Tukey, J. W. 1995, American Mathematical Society, doi: [10.2307/2003354](https://doi.org/10.2307/2003354) 24
- Dahle, H., Gladders, M. D., Sharon, K., et al. 2013, Astrophysical Journal, 773, 146, doi: [10.1088/0004-637X/773/2/146](https://doi.org/10.1088/0004-637X/773/2/146) 36
- Garrett, K., & Dūda, G. 2011, Advances in Astronomy, 2011, 968283, doi: [10.1155/2011/968283](https://doi.org/10.1155/2011/968283) 32
- Gauss, C. 1805, "Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", 514, 265–303 24
- Kassiola, A., & Kovner, I. 1993, Astrophysical Journal, 417, 450, doi: [10.1086/173325](https://doi.org/10.1086/173325) 18
- Kovner, I. 1987, Astrophysical Journal, 312, 22, doi: [10.1086/164846](https://doi.org/10.1086/164846) 35
- Lotz, J. M., Koekemoer, A., Coe, D., et al. 2017, Astrophysical Journal, 837, 97, doi: [10.3847/1538-4357/837/1/97](https://doi.org/10.3847/1538-4357/837/1/97) 37
- Lynds, R., & Petrosian, V. 1986, 18, 1014 35
- Meneghetti, M., Rasia, E., Merten, J., et al. 2010, Astronomy and Astrophysics, 514, A93, doi: [10.1051/0004-6361/200913222](https://doi.org/10.1051/0004-6361/200913222) 24, 37
- Meneghetti, M., Rasia, E., Vega, J., et al. 2014, Astrophysical Journal, 797, 34, doi: [10.1088/0004-637X/797/1/34](https://doi.org/10.1088/0004-637X/797/1/34) 29, 32
- Merritt, D. 1987, Astrophysical Journal, 313, 121, doi: [10.1086/164953](https://doi.org/10.1086/164953) 30
- Merritt, D., Graham, A. W., Moore, B., Diemand, J., & Terzić, B. 2006, The Astronomical Journal, 132, 2685, doi: [10.1086/508988](https://doi.org/10.1086/508988) 33

- Neto, A. F., Gao, L., Bett, P., et al. 2007, *Monthly Notices of the RAS*, 381, 1450, doi: [10.1111/j.1365-2966.2007.12381.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2007.12381.x) 29
- Newman, A. B., Treu, T., Ellis, R. S., & Sand, D. J. 2011, *Astrophysical Journal, Letters*, 728, L39, doi: [10.1088/2041-8205/728/2/L39](https://doi.org/10.1088/2041-8205/728/2/L39) 33
- Oguri, M. 2010, glafic: gravitational lens adaptive-mesh fitting code 17
- Oguri, M., & Keeton, C. R. 2004, *The Astrophysical Journal*, 610, 663, doi: [10.1086/421870](https://doi.org/10.1086/421870) 37
- Paczynski, B. 1987, *Nature*, 325, 572, doi: [10.1038/325572a0](https://doi.org/10.1038/325572a0) 35
- Postman, M., Coe, D., Benítez, N., et al. 2012, *Astrophysical Journal, Supplement*, 199, 25, doi: [10.1088/0067-0049/199/2/25](https://doi.org/10.1088/0067-0049/199/2/25) 36
- Rivera-Thorsen, T. E., Dahle, H., Gronke, M., et al. 2017, *Astronomy and Astrophysics*, 608, L4, doi: [10.1051/0004-6361/201732173](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201732173) 33
- Rood, H. J., & Sastry, G. N. 1971, *Publications of the ASP*, 83, 313, doi: [10.1086/129128](https://doi.org/10.1086/129128) 28
- Rosati, P., Borgani, S., & Norman, C. 2002, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 40, 539, doi: [10.1146/annurev.astro.40.120401.150547](https://doi.org/10.1146/annurev.astro.40.120401.150547) 29
- Sand, D. J., Treu, T., Smith, G. P., & Ellis, R. S. 2004, *Astrophysical Journal*, 604, 88, doi: [10.1086/382146](https://doi.org/10.1086/382146) 33
- Schneider, P. 2006, *Extragalactic Astronomy and Cosmology*, 231 29, 30, 31
- Sunyaev, R. A., & Zeldovich, Y. B. 1970, *Comments on Astrophysics and Space Physics*, 2, 66 31
- Walsh, D., Carswell, R. F., & Weymann, R. J. 1979, *Nature*, 279, 381, doi: [10.1038/279381a0](https://doi.org/10.1038/279381a0) 1, 35
- Weinberg, D. H., Bullock, J. S., Governato, F., Kuzio de Naray, R., & Peter, A. H. G. 2015, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 112, 12249, doi: [10.1073/pnas.1308716112](https://doi.org/10.1073/pnas.1308716112) 27
- Zwicky, F. 1933, *Helvetica Physica Acta*, 6, 110 27, 35