

Alma Mater Studiorum - Università di Bologna

Dipartimento di Fisica e Astronomia

Corso di Laurea Magistrale in Astrofisica e Cosmologia

Introduzione alla Teoria LambdaCDM

Lecture Notes

Autore:
Roberto Caione

Supervisor:
Massimo Meneghetti
Correlatori:
Lauro Moscardini
Carlo Giocoli



Indice

1	Cosmologia	1
1.1	Introduzione alla Teoria Λ CDM	1
1.1.1	La metrica di Friedmann-Robertson-Walker	1
1.1.2	La legge di Hubble	2
1.1.3	Redshift	2
1.1.4	Il parametro di decelerazione	3
1.1.5	Distanze cosmologiche	4
1.1.6	Le equazioni di Friedmann	5
1.1.7	Modelli di Friedmann	5
1.1.8	Modelli con fluido perfetto	6
1.1.9	Inevitabilità del Big Bang in un universo di Friedmann	8
1.1.10	Universi piatti	8
1.1.11	Universi curvi	10
1.1.12	Commenti generali	10
1.1.13	Orizzonte cosmologico	11
1.1.14	Modelli con costante cosmologica	12
1.2	Introduzione alla Teoria di Jeans	13
1.2.1	Universi statici	14
1.2.2	Universi piatti in espansione	16
1.2.3	Massa di Jeans per HDM e CDM	17
1.3	Introduzione alla teoria delle perturbazioni	17
1.3.1	Funzione di correlazione e spettro di potenza	18
1.3.2	Relazioni di scala	19
1.4	Evoluzione in regime non lineare	20
1.4.1	Funzione di massa	21
	Bibliografia	23

Capitolo 1

Cosmologia

1.1 Introduzione alla Teoria Λ CDM

Il primo principio in cosmologia è il *Principio Cosmologico*, secondo il quale nell'universo non esistono né posizioni né direzioni privilegiate e su grande scala può essere considerato omogeneo e isotropo. Questo antico concetto fu usato da Albert Einstein nel 1917 per conferire un fondamento teorico alla cosmologia. La distribuzione delle galassie e degli ammassi di galassie su grande scala e l'isotropia della CMB (Cosmic Microwave Background radiation) sono una prova di fondamentale supporto al suddetto principio. La formazione delle strutture cosmiche a partire da una distribuzione primordiale omogenea è giustificata come vedremo da una teoria fondata sull'evoluzione di piccole perturbazioni causate da fluttuazioni della gravità quantistica, ma dal punto di vista macroscopico le strutture sembrano essere regolate dalle leggi della Relatività Generale, la cui essenza è data dalla forza predominante in natura: la gravità.

1.1.1 La metrica di Friedmann-Robertson-Walker

La prima cosa da fare per sviluppare qualsiasi modello cosmologico è stabilire una metrica della quale ci possiamo servire per misurare le distanze tra due eventi nello spazio-tempo. La forma della metrica dovrà rispettare le condizioni di isotropia e omogeneità che supportano il principio cosmologico, in generale essa ha la seguente forma:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - g_{ij} dx^i dx^j = (cdt)^2 - dl^2, \quad (1.1)$$

dove $i, j = 1, 2, 3$ sono le coordinate per la componente spaziale dl^2 e $(cdt)^2$ è la componente temporale, in particolare quella che fa al nostro caso è la metrica di **Friedmann-Robertson-Walker (FRW)**:

$$ds^2 = (cdt)^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2(\sin^2\theta d\phi^2 + d\theta^2) \right], \quad (1.2)$$

dove $a = a(t)$ (in generale $[a(t)] = cm$) è chiamato *fattore di scala* o *fattore di espansione*. La geometria del nostro universo dipenderà pertanto da K :

- $K = 0 \rightarrow$ geometria cartesiana - euclidea \rightarrow universo piatto
- $K = 1 \rightarrow$ geometria ipersferica - pseudo euclidea \rightarrow universo chiuso
- $K = -1 \rightarrow$ geometria iperboloidica - pseudo euclidea \rightarrow universo aperto.

È di cruciale importanza comprendere quindi in quale universo viviamo e per fare ciò abbiamo bisogno di misurare la distanza tra gli eventi, perché essa cambia al variare della geometria dell'universo.

1.1.2 La legge di Hubble

La distanza tra P e l'origine di un sistema di riferimento P_0 , in coordinate polari, ad un certo istante fissato $dt = 0$ presi $d\theta = d\phi = 0$, è chiamata distanza propria ed è ottenuta integrando la metrica di FRW da $P_0 = (0, 0, 0)$ a $P = (r, 0, 0)$:

$$d_{pr} = \int_0^r \frac{a(t)}{\sqrt{1 - Kr'^2}} dr' \rightarrow d_{pr} = a(t)F(r), \quad (1.3)$$

dove $F(r)$ è una funzione che descrive la componente spaziale della metrica di FRW e assume differenti valori a seconda della geometria dell'universo:

- $K = 0 \rightarrow F(r) = r$
- $K = 1 \rightarrow F(r) = \sin^{-1}(r)$
- $K = -1 \rightarrow F(r) = \sinh^{-1}(r)$.

Dal momento che la distanza propria è una quantità misurabile che dipende dal fattore di scala, possiamo definire la distanza comovente come d_{pr} calcolata rispetto all'origine dell'asse temporale t_0 :

$$d_C \equiv d_{pr}(t_0) = a(t_0)F(r) = a_0F(r). \quad (1.4)$$

La relazione tra distanza propria e distanza comovente è la seguente:

$$d_{pr} = d_C \frac{a(t)}{a_0}, \quad (1.5)$$

ma dal momento che essa cambia nel tempo possiamo derivarla così da trovare la velocità radiale di P rispetto a P_0 :

$$v_R \equiv \frac{d}{dt}d_{pr} = \dot{a}(t)F(r) + a(t)\dot{F}(r). \quad (1.6)$$

Considerando che $F'(r) = 0$:

$$v_R = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}d_{pr} = H(t)d_{pr}. \quad (1.7)$$

Quest'ultima è la famosa legge di Hubble, nella quale $H_0 \equiv H(t_0)$ è la cosiddetta costante di Hubble. Questo parametro ci consente di conoscere l'attuale velocità di espansione isotropa dell'universo. È interessante notare che al tempo della scoperta da parte di Hubble, il valore era circa 7 volte più grande di quello misurato oggi (Hubble, 1929); questo era dovuto ad una sottostima degli errori o ad una misura sbagliata del redshift del campione di galassie analizzate. Negli ultimi 25 anni sono stati compiuti notevoli sforzi finalizzati a determinare il valore esatto di H_0 . La crescente precisione delle più recenti misure, prese usando delle candele standard ($73.24 \pm 1.74 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Riess et al., 2016)) o i dati del satellite Planck riguardanti la CMB ($67.74 \pm 0.46 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (Planck Collaboration et al., 2016)), ha rilevato delle tensioni ad un livello di $\approx 3\sigma$; questo potrebbe indicare la presenza di effetti sistematici sconosciuti o la presenza di meccanismi fisici ancora incompresi (Grillo et al., 2018).

1.1.3 Redshift

Le osservazioni cosmologiche sono concordi nell'affermare che la lunghezza d'onda λ_{em} di un fotone emesso da una sorgente distante è diversa dalla lunghezza d'onda osservata λ_{obs} dalla Terra. È possibile definire un parametro che tiene conto della differenza tra λ_{em} al tempo t_{em} e λ_{obs} al tempo $t_{obs} = t_0$:

$$z \equiv \frac{\lambda_{obs} - \lambda_{em}}{\lambda_{em}} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \quad (1.8)$$

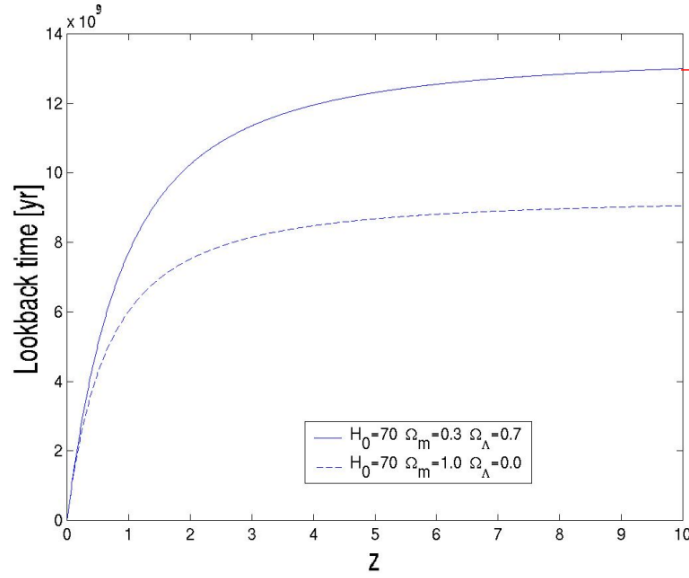


Figura 1.1: In figura possiamo apprezzare la look back time function. Questa funzione permette di associare ad certo redshift la corrispondente epoca in termini di anni; si noti come la curva è intrinsecamente legata al modello cosmologico adottato per descrivere l'universo.

La ragione di tale differenza sta nel fatto che gli oggetti in questione, coinvolti nell'espansione dell'universo, si muovono con una velocità v_R rispetto ad un sistema di riferimento solidale con l'osservatore. Se l'oggetto si allontana dall'osservatore risulta che $z > 0$ e si parla di *redshift*, viceversa se $z < 0$ si parla di *blueshift*. Nello specifico z è una funzione che ci dice come cambia il fattore di scala dell'universo una volta che è stata emessa la radiazione in accordo alla seguente formula e al grafico in Fig 1.1 di cui ripareremo nella Sez. 1.1.12:

$$1 + z = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (1.9)$$

1.1.4 Il parametro di decelerazione

Per conoscere l'andamento di $a(t)$ sviluppiamo in serie di Taylor attorno al punto in cui abbiamo maggiori informazioni, cioè oggi:

$$a(t) = a_0 + \left. \frac{da(t)}{dt} \right|_{t=t_0} (t - t_0) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2a(t)}{dt^2} \right|_{t=t_0} (t - t_0)^2 + \dots = \quad (1.10)$$

$$= a_0 \left[1 + \frac{1}{a_0} \dot{a}(t - t_0) + \frac{1}{2a_0} \ddot{a}(t - t_0)^2 + \dots \right]. \quad (1.11)$$

Introduciamo a questo punto il **parametro di decelerazione**

$$q(t) := -\frac{a(t)\ddot{a}(t)}{\dot{a}(t)^2}, \quad (1.12)$$

secondo parametro di cruciale importanza in cosmologia, una via alternativa per indicare la derivata seconda di $a(t)$ ed espresso in modo tale da risultare adimensionale a differenza di $H(t)$. È definito negativo perché, come vedremo più avanti nelle equazioni di Friedmann, tutti i modelli

standard risultano “decelerati” nel loro moto di espansione; in virtù di quanto detto l’Eq. 1.10 può essere riscritta come:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0(t - t_0) - \frac{q_0}{2} H_0^2(t - t_0)^2 + \dots \right], \quad (1.13)$$

dove q_0 è il valore del parametro di decelerazione a $t = t_0$. Il secondo termine dell’espansione dipende dalla derivata prima di a e quindi dal parametro di Hubble, il terzo dalla derivata seconda e quindi dal parametro di decelerazione. Più termini consideriamo nell’espansione in serie, più accurata diventa la misura della decelerazione.

1.1.5 Distanze cosmologiche

In cosmologia non esiste una definizione assoluta per il termine *distanza*, perché essa dipende dalle condizioni dell’osservatore rispetto alla spazio-tempo. Il sistema di coordinate comovente adottato è legato al concetto di distanza propria nello spazio-tempo descritto dalla metrica di FRW, ma non possiamo applicare questo tipo di misura ad oggetti astronomici di cui possiamo stimare solo la luce emessa che impiega un certo tempo a coprire una certa distanza. Il legame tra il flusso di energia l ricevuto da una sorgente e la sua luminosità intrinseca L la quale a sua volta dipende dalla distanza della sorgente d_L è espresso dalla seguente relazione:

$$l = \frac{L}{4\pi d_L^2}, \quad (1.14)$$

dove d_L è detta distanza in luminosità. Su questa misura si basa il concetto di candela standard, oggetti con una luminosità intrinseca nota che possono essere usati per misurare le distanze; oltretutto dobbiamo tener conto anche di due altri fenomeni: il redshift e la dilatazione del tempo, così due altri fattori $\frac{a_0}{a}$ giocano il loro ruolo nella formula precedente che a questo punto diviene

$$l = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2} \left(\frac{a}{a_0} \right)^2 = \frac{L}{4\pi a_0^2 r^2} (1+z)^{-2}. \quad (1.15)$$

Tenendo conto di (1.9), la definizione di distanza in luminosità è la seguente:

$$d_L = a_0 r (1+z). \quad (1.16)$$

Un altro tipo di distanza è la distanza di diametro angolare o semplicemente distanza angolare d_A , la cui definizione preserva le caratteristiche geometriche dello spazio euclideo. L’angolo sotteso da un oggetto di dimensioni note, $D_{pr}(t)$, fornisce la distanza dello stesso, se chiamiamo quest’angolo $d\theta$, ipotizzando un allineamento perfetto ($dr = 0$ e $d\phi = 0$), supponendo che la luce arrivi tutta simultaneamente ($dt=0$), varrà la seguente equivalenza:

$$ds^2 = D_{pr}^2 = a(t)^2 r^2 d\theta^2 \rightarrow D_{pr} = a(t) r d\theta \quad (1.17)$$

e per piccoli angoli:

$$d_A = \frac{D_{pr}}{\Delta\theta}. \quad (1.18)$$

Infine, utilizzando la relazione di dualità valida per la metrica di FRW ¹, si possono collegare le due definizioni nella seguente maniera:

$$d_A = a(t) r = \frac{d_L}{(1+z)^2}. \quad (1.19)$$

¹Se non fosse valida la metrica di FRW allora non sarebbe valido nemmeno il principio cosmologico, la validità di questa relazione è pertanto un buon modo per testare le nostre argomentazioni.

1.1.6 Le equazioni di Friedmann

Ogni modello cosmologico nasce dal sistema di equazioni di Einstein:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R - \Lambda g_{ij} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij}, \quad (1.20)$$

dove R_{ij} è il tensore di Ricci, R è lo scalare di Ricci e Λ è la costante cosmologica, introdotta da Einstein come una correzione nella formula originale per preservare il concetto di universo stazionario, decaduto del tutto in seguito alla scoperta dell'espansione dell'universo da parte di E. Hubble; oggi è usata per formalizzare il concetto di energia oscura (come vedremo nella Sez. 1.1.14). Queste equazioni ci dicono come la geometria dello spazio-tempo, espressa dal tensore metrico g_{ij} , è determinata dal suo contenuto energetico (equivalentemente di materia) espresso dal tensore energia-impulso T_{ij} . Per sviluppare il modello del Big Bang si assume la metrica di FRW e si prende in considerazione un fluido energia-impulso descritto dal seguente tensore:

$$T_{ij} = -pg_{ij} + (p + \rho c^2)U_i U_j, \quad (1.21)$$

dove p è la pressione, ρc^2 la densità di energia e U_k la quadri-velocità. Il sistema in tutto è composto da 16 equazioni ($i, j = 1, 2, 3, 4$) di cui le uniche due indipendenti sono la componente tempo-tempo e la componente spazio-spazio, rispettivamente:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) a \quad (1.22)$$

$$a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2Kc^2 = 4\pi G \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right) a^2. \quad (1.23)$$

Inserendo l'Eq. 1.22 nell'Eq. 1.23, con semplici passaggi algebrici, otteniamo:

$$\dot{a}^2 + Kc^2 = \frac{8}{3}\pi G \rho a^2. \quad (1.24)$$

La 1.22 e la 1.24 sono chiamate equazioni di Friedmann, fondamentali per ogni modello cosmologico; l'ultima espressione che abbiamo bisogno di definire è la condizione di adiabaticità:

$$dU = -pdV \rightarrow d(\rho c^2 a^3) = -pda^3 \rightarrow d(\rho a^3) = -3\frac{p}{c^2}a^2 da. \quad (1.25)$$

È bene sottolineare che la densità che compare in ogni equazione è data dalla somma delle densità di ogni componente dell'universo: materia barionica e non, energia oscura e man mano tutte le componenti minoritarie.

1.1.7 Modelli di Friedmann

Il modello del Big Bang si basa sui modelli cosmologici che si ottengono risolvendo le equazioni di Friedmann, che seppur formulate nel 1922 non furono considerate importanti fino alla scoperta di Hubble nel 1926. Il gesuita George Lemaître riottenne gli stessi risultati nel 1927 alla luce delle recenti scoperte, ecco perché spesso viene considerato come il padre della moderna teoria del Big Bang. Innanzitutto assumiamo un fluido perfetto con una certa densità ρ e una certa pressione p ; le equazioni di Friedmann ci permettono di calcolare l'evoluzione temporale di $a(t)$, $\rho(t)$ e $p(t)$ nota l'equazione di stato. Definiamo

$$\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (1.26)$$

e consideriamo di trovarci ad un determinato istante di tempo t_0 che coincide con "oggi", in questo caso

$$H_0 = \frac{\dot{a}_0}{a_0} \quad (1.27)$$

e

$$\rho_{crit,0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G}. \quad (1.28)$$

Se prendiamo l'Eq. 1.24 calcolata oggi e la riscriviamo come

$$\left(\frac{\dot{a}_0}{a_0}\right)^2 = -\frac{Kc^2}{a_0^2} + \frac{8\pi G}{3}\rho_0^2 \frac{H_0^2}{H_0^2} \frac{1}{a_0^2} \quad (1.29)$$

sfruttando le Eq. 1.28 e 1.27 otteniamo:

$$H_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_{crit,0}}\right) = -\frac{Kc^2}{a_0^2} \quad (1.30)$$

e una volta introdotto il parametro di densità $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}}$ si hanno diversi scenari a seconda del valore che assume K :

- $K = 0 \rightarrow \rho_0 = \rho_{crit,0} \rightarrow \Omega_0 = 1$
- $K = 1 \rightarrow \rho_0 > \rho_{crit,0} \rightarrow \Omega_0 > 1$
- $K = -1 \rightarrow \rho_0 < \rho_{crit,0} \rightarrow \Omega_0 < 1$.

Per conoscere Ω_0 è necessario conoscere il valore di H_0 e di $\rho_{crit,0}$, tenendo conto del risultato nell'Eq. 1.28 abbiamo che:

$$\rho_{crit,0} = 1.9 \cdot 10^{-29} h^2 g/cm^3 = 2.775 \cdot 10^{11} h^2 M_\odot / Mpc^3 \quad (1.31)$$

quindi per conoscere la geometria dell'universo servirebbe conoscerne la densità oggi. Tenendo conto delle varie componenti dell'universo è opportuno definire $\Omega_{0,TOT} \equiv \sum \Omega_{0,i}$, in modo che la seconda equazione di Friedmann si possa scrivere in una forma ancora più generale:

$$H_0^2(1 - \Omega_{0,TOT}) = -\frac{Kc^2}{a_0^2}. \quad (1.32)$$

1.1.8 Modelli con fluido perfetto

L'approssimazione di fluido perfetto, che entra nelle equazioni tramite un tensore energia impulso, è realistica per descrivere le proprietà dell'universo su grande scala; è sufficiente infatti che il libero cammino medio delle particelle componenti il fluido sia molto minore delle scale di interesse fisico per trattare il fluido come perfetto. Questa caratteristica del tensore è richiesta perché la teoria sia compatibile con il principio cosmologico. Detto in altre parole, non sono permesse pressioni anisotrope. Per dire di più a proposito delle soluzioni cosmologiche è necessario approfondire la relazione tra p e ρ . È opportuno quindi introdurre un'equazione di stato con la seguente forma $p = p(\rho)$ che in molti casi di interesse fisico assume la seguente forma generale:

$$p = w\rho c^2, \quad (1.33)$$

dove w è una costante limitata a variare all'interno dell'intervallo $0 \leq w < 1$ detto di Zel'dovich², in ogni caso la costante w assumerà valori diversi a seconda della componente della pressione trattata. L'equazione di stato 1.25 ci permette di definire l'andamento della densità in funzione del valore che assume w rispetto al tipo di componente che si vuole trattare:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (1.34)$$

²Il motivo per il quale si esclude $w > 1$ è per non avere una velocità del suono maggiore di quella della luce dal momento che $c_s = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{S=const} = c\sqrt{w}$; d'altro canto se fosse $w < 0$ si avrebbe una velocità del suono immaginaria.

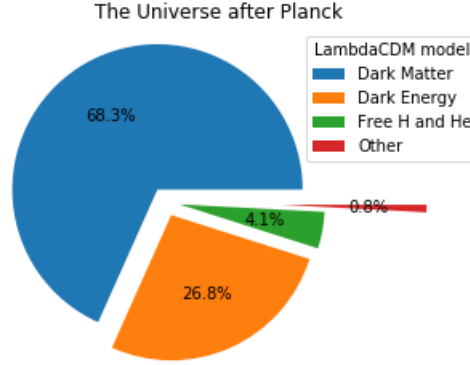


Figura 1.2: Budget energetico dell'universo. Stato dell'arte dopo le misure di Planck.

Equivalenza materia-radiazione	$\rho_{0,M}(1+z_{eq})^3 \equiv \rho_{0,R}(1+z_{eq})^4 \rightarrow z_{eq} \approx 10^4$
Equivalenza materia-Λ	$\rho_{0,\Lambda} \equiv \rho_{0,M}(1+z_{eq})^3 \rightarrow z_{eq} \approx 0.7$

Tabella 1.1: Tabella delle equivalenze.

Nel caso in cui $w = 0$ si ha un universo di materia o polvere, quindi:

$$\rho_M = \rho_{0,M} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 = \rho_{0,M}(1+z)^3; \quad (1.35)$$

nel caso in cui $w = \frac{1}{3}$ si ha un universo di radiazione:

$$\rho_R = \rho_{0,R} \left(\frac{a_0}{a} \right)^4 = \rho_{0,R}(1+z)^4; \quad (1.36)$$

per quanto riguarda la costante cosmologica, essa corrisponde ad un valore di $w = -1$, in tal caso il contributo della densità è costante:

$$\rho_\Lambda = \rho_{0,\Lambda} \left(\frac{a_0}{a} \right)^0 = \rho_{0,\Lambda}. \quad (1.37)$$

Ci sono modelli di energia oscura o di quintessenza i quali prevedono che il parametro $w = w(z)$ sia dipendente dal tempo (Peebles & Ratra, 2003). Abbiamo trovato come varia il contributo della densità delle diverse componenti dell'universo in funzione del redshift. I valori di densità oggi sono (Planck Collaboration et al., 2016):

- $\rho_{TOT} \approx \rho_{0,crit} \rightarrow \Omega_{0,TOT} \approx 1$;
- $\rho_R = 10^{-34} \frac{g}{cm^3} \rightarrow \Omega_{0,R} = 10^{-5}$;
- $\rho_M = 0.3\rho_{0,crit} \rightarrow \Omega_{0,M} \approx 0.3$;
- $\rho_\Lambda = 0.7\rho_{0,crit} \rightarrow \Omega_{0,\Lambda} \approx 0.7$;

È così possibile dividere la storia dell'universo in epoche. In ciascun epoca l'evoluzione dell'universo è determinata dalla componente dominante in quel momento. Il passaggio da un epoca alla successiva è definito dal redshift in corrispondenza del quale le densità di due componenti si equivalgono, vedi Tab. 1.1.8.

1.1.9 Inevitabilità del Big Bang in un universo di Friedmann

Consideriamo la prima equazione di Friedmann (Eq. 1.22). Usando l'Eq. 1.25 otteniamo:

$$\ddot{a} = -\frac{4}{3}\pi G\rho(1+3w)a. \quad (1.38)$$

Quando abbiamo introdotto il parametro di Zel'dovich abbiamo imposto delle condizioni *ad hoc* dalle quali scaturisce che $(1+3w) > 0$ così che $\ddot{a} < 0$ in ogni caso. La quantità \dot{a} entra nelle equazioni come un quadrato quindi avrebbe il segno libero, ma le osservazioni ci parlano di un universo in espansione, che in altre parole significa $H > 0$ e quindi $\dot{a} > 0$; la prima equazione di Friedmann ci dice che la funzione di $a(t)$ deve avere concavità negativa e non avere flessi. Questo significa che la stessa funzione prima o poi intercetta l'asse temporale, pertanto, esiste un istante iniziale da cui far partire la misura del tempo. Poiché $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, allora $\lim_{a \rightarrow 0} \rho = \infty$, cioè all'istante in cui $a = 0$ la densità dell'universo deve essere teoricamente infinita e con essa anche la temperatura. Questo istante si chiama Big Bang.

Il Big Bang non può essere evitato in un modello di universo basato sulle equazioni di Friedmann a meno che non si cambi la definizione di w o si rinunci alle ipotesi di isotropia ed omogeneità. Il Big Bang va considerato come condizione iniziale ma a causa del principio di indeterminazione di Heisenberg, la nostra indagine non può spingersi indietro oltre il tempo di Planck:

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar \rightarrow t_P := \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \sim 10^{-43} \text{sec}, \quad (1.39)$$

dove tra l'altro la gravità necessita di essere quantizzata. Il Big Bang potrebbe essere solamente una conseguenza dell'extrapolare deduzioni basate sulla Relatività Generale in una situazione dove questa teoria non è valida. A proposito di ciò Einstein scriveva:

“La teoria è basata su una separazione dei concetti di campo gravitazionale e materia. Mentre questa potrebbe essere una buona approssimazione per campi deboli, potrebbe presumibilmente risultare inadeguata per densità di materia estremamente elevate. Non si dovrebbe quindi assumere la validità delle equazioni per queste elevate densità e c'è la possibilità che in una teoria unificata questa singolarità non esista (A. Einstein 1950).”

Esistono diversi modi per evitare la singolarità anche senza coinvolgere la gravità quantistica e rimanendo nel campo della relatività generale, come prendere in considerazione un'equazione di stato che non sia valida per un fluido perfetto, far leva sull'importanza dinamica nel tempo della costante cosmologica o persino abbandonare il principio cosmologico, tuttavia le osservazioni su grande scala non sono concordi con questi tentativi, così al momento sembra non esserci un modo per evitare il Big Bang.

Dal punto di vista teorico, rifacendoci all'Eq. 1.38 concludiamo che a seconda del segno di $(1+3w)$ avremo che:

- se $1+3w < 0 \rightarrow w < -\frac{1}{3}$ allora $\ddot{a} > 0$ l'espansione dell'universo è accelerata;
- se $1+3w > 0 \rightarrow w > -\frac{1}{3}$ allora $\ddot{a} < 0$ l'espansione dell'universo è decelerata.

Analizzando nei dettagli i modelli di Friedmann emerge che le soluzioni analitiche esistono solo per universi di pura materia, detti anche universi di polvere e che le soluzioni sono diverse a seconda che l'universo sia piatto, aperto o chiuso.

1.1.10 Universi piatti

Il modello per descrivere un universo piatto ($\Omega_0 = 1$) con un'unica componente è quello di *Einstein de-Sitter*, dove l'Eq. 1.32 assume la seguente forma:

$$\dot{a} = a_0 H_0 \left(\frac{a_0}{a} \right)^{\frac{1+3w}{2}}, \quad (1.40)$$

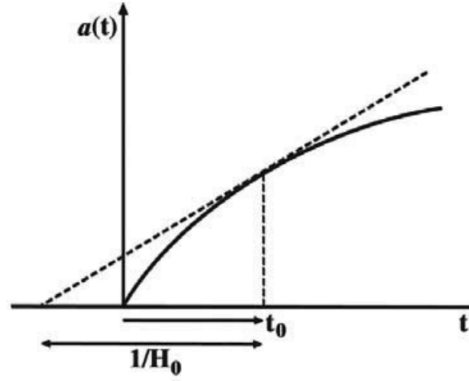


Figura 1.3: La concavità di $a(t)$ assicura che se $\dot{a}(t) > 0$ ad un certo tempo t allora ci deve essere una singolarità ad un certo istante nel passato.

dove possiamo notare che \dot{a} dipende solo da a poiché tutto il resto è costante; integrando ambo i membri di quest'ultima è quindi possibile ottenere l'andamento di a nel tempo, ovvero:

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (1.41)$$

la quale rappresenta un'espansione dell'universo che va avanti indefinitamente avendo assunto valide le relazioni di Zel'dovich. Ricordandoci dell'Eq. 1.9, l'ultima relazione si può invertire così da ottenere:

$$t = t_0(1+z)^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (1.42)$$

Le relazioni nell'Eq. 1.41 e 1.42 sono i risultati principali nel caso di universi piatti, dalle quali si ricavano tutte le altre riassunte nella seguente tabella:

Generale	$w = 0$	$w = 1/3$
$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$	$a(t) \propto t^{2/3}$	$a(t) \propto t^{1/2}$
$t = t_0(1+z)^{\frac{2}{3(1+w)}}$	$t \propto (1+z)^{-3/2}$	$t \propto (1+z)^{-2}$
$H(t) = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{t}$	$H(t) = \frac{2}{3t}$	$H(t) = \frac{1}{2t}$
$t_0 = \frac{2}{3(1+w)} \frac{1}{H_0}$	$t_0 = \frac{2}{3H_0}$	$t_0 = \frac{1}{2H_0}$
$q = \frac{1+3w}{2}$	$q = \frac{1}{2}$	$q = 1$
$\rho = \frac{1}{6\pi G(1+w)^2} \frac{1}{t^2}$	$\rho = \frac{1}{6\pi G} \frac{1}{t^2}$	$\rho = \frac{3}{32\pi G} \frac{1}{t^2}$

Tabella 1.2: Relazioni principali per il modello EdS nei tre casi: generale, universi di polvere e universi di radiazione.

Osservando i risultati sopra è evidente come H sia una funzione decrescente del tempo, quindi l'espansione rallenta col tempo e per $t \rightarrow 0$, cioè nelle vicinanze del Big Bang, $H \rightarrow \infty$. Per il modello EdS la misura di H_0 fornisce direttamente l'età dell'universo. Il fatto non ci stupisce dal momento che H_0 è una misura della tangente alla curva di $a(t)$ nel punto che corrisponde ad oggi. Se estrapoliamo linearmente la tangente e ne troviamo l'intersezione con l'asse t si ha una stima dell'età dell'universo, ma questa stima differisce dall'età vera che è minore dal momento che $H(t)$ è una funzione decrescente del tempo (vedi Fig. 1.3).

L'altro parametro di fondamentale importanza è quello di decelerazione q ; quest'ultima è una condizione generale nei modelli derivati dalle equazioni di Friedmann, ma nel caso EdS non ha dipendenza dal tempo e il parametro risulta pari ad una costante.

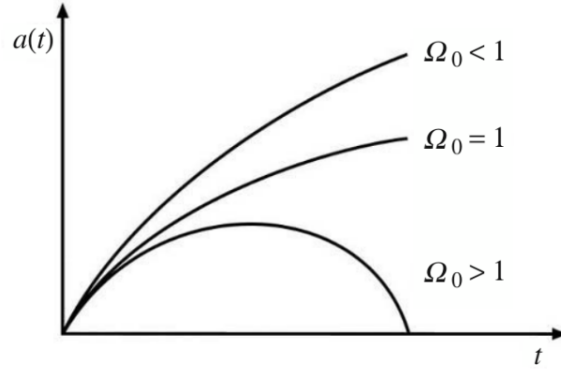


Figura 1.4: Evoluzione del parametro $a(t)$ nel caso di un modello aperto, piatto (o EdS) e chiuso.

1.1.11 Universi curvi

Nel caso in cui $\Omega_0 \neq 1$, l'Eq. 1.32 assume la seguente forma

$$\left(\frac{\dot{a}}{a_0}\right)^2 = H_0^2 \left[(1 - \Omega_0) + \Omega_0 \left(\frac{a_0}{a}\right)^{1+3w} \right], \quad (1.43)$$

dove il primo termine tra parentesi quadre è costante nel tempo e dipende dalla curvatura dell'universo, mentre la seconda parte varia come $a^{-(1+3w)}$. Esisterà un'epoca in cui i due termini saranno uguali, ossia

$$a = a^* \equiv a_0 \left(\frac{|1 - \Omega_0|}{\Omega_0} \right)^{-\frac{1}{1+3w}}. \quad (1.44)$$

Quando $a \ll a^*$ gli universi curvi si comporteranno come universi EdS, quando $a > a^*$ l'universo risulta curvo. In altre parole questi risultati ci autorizzano ad ignorare i termini di curvatura quando si studia l'universo ad alto redshift ($z \sim 10$), viceversa a z piccoli bisogna preoccuparsi del valore di Ω_0 e distinguere i casi di universo aperto e chiuso. Nei modelli aperti il parametro di espansione a cresce indefinitamente con il tempo, come nei modelli EdS. \dot{a} non arriva mai a zero e, supponendo che $a(t)$ sia positiva, ad un certo istante t_0 , la sua derivata è sempre positiva. Il secondo termine della 1.43 è trascurabile per $a \gg a^*$ e quindi la derivata di a è costante nel tempo, questo significa che $a \propto t$, cioè la crescita di a in un universo aperto è lineare nel tempo. Abbiamo inoltre che $H = \frac{\dot{a}}{a} \propto \frac{1}{t}$, $q \rightarrow 0$ (asintoticamente) e $\rho \propto \rho_{0,crit} \Omega_0 \left(\frac{t_0}{t}\right)^{3(1+w)}$, quindi l'espansione è libera e non decelerata. Nei modelli chiusi, esiste un tempo t_{max} al quale la derivata prima \dot{a} è zero. Questo significa che esisterà un valore massimo della funzione $a(t)$:

$$a_{max} \equiv a_0 \left(\frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \right)^{\frac{1}{1+3w}}. \quad (1.45)$$

In corrispondenza del tempo t_{max} la densità raggiunge un minimo, ma poichè l'Eq. 1.43 è quadratica quindi simmetrica, l'andamento dopo il massimo sarà decrescente.

Dunque un modello chiuso prevede una seconda singolarità con l'universo che si chiude su se stesso, un fenomeno detto Big Crunch; in Fig. 1.4 è mostrato l'andamento di $a(t)$ per i tre casi appena presi in considerazione.

1.1.12 Commenti generali

Abbiamo potuto constatare che ad alto redshift, in prossimità del Big Bang, gli universi curvi si comportano come universi piatti. Tale approssimazione cessa di valere a redshift bassi, quando

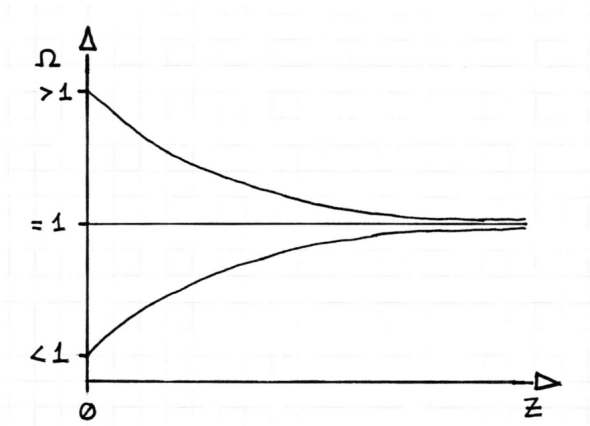


Figura 1.5: Andamento di $\Omega(z)$ nei tre casi di universo: aperto, piatto e chiuso.

$a \approx a^*$. Se l'universo fosse con una sola componente l'età dipenderebbe solo da H_0 e Ω_0 ; fissato H_0 si ha che l'età dell'universo è minore o maggiore a seconda che Ω_0 cresca o decresca. Le osservazioni sono concordi nel dire che l'espansione dell'universo è determinata oggi da almeno due componenti, la materia e l'energia oscura, senza dimenticare la radiazione, che sebbene oggi sia trascurabile in passato ha dominato la scena. Nella Sez. 1.1.3 avevamo accennato al concetto di *Look Back Time* secondo il quale la distanza temporale di un qualsiasi evento rispetto a noi osservatori sulla Terra ($z = 0$) si esprime come:

$$t_{LB}(z) := t_0 - t(z). \quad (1.46)$$

Quest'ultima espressione rappresenta il tempo trascorso dall'emissione di un segnale a redshift z che giunge a noi a t_0 ; il valore di $t(z)$ dipenderà dal modello cosmologico adottato, ma dal momento che più ci si avvicina al Big Bang e più i modelli tendono ad EdS, potremo scrivere:

$$t(z) = \frac{1}{H_0} \int_z^\infty (1+z)^2 (\Omega_0 z)^{-1/2} dz \approx \frac{2z^{-3/2}}{3H_0\Omega_0^{1/2}}, \quad (1.47)$$

dove l'approssimazione è valida esclusivamente per i primi istanti di vita dell'universo, quando $1+z \approx z$ e $\Omega_0 \approx 1$.

È importante tenere a mente che il parametro di densità è una funzione del tempo in ognuno di questi modelli, quindi potrebbe essere interessante scrivere l'espressione esatta per questo parametro, ovvero:

$$\Omega_w^{-1}(z) - 1 = \frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}}. \quad (1.48)$$

Dal grafico in Fig. 1.5 è evidente come, per $z \rightarrow \infty$, i tre possibili andamenti di Ω tendono tutti asintoticamente a quello dell'universo piatto. Un'osservazione ovvia, ma necessaria, è che dovendo conservare la validità delle relazioni di Zel'dovich, l'esponente al denominatore sarà sempre positivo, pertanto la geometria dell'universo non può essere cambiata dal Big Bang ad oggi, se l'universo nasce sferico/piatto/iperbolicamente tale rimarrà per tutta la sua "esistenza".

1.1.13 Orizzonte cosmologico

Si definisce orizzonte cosmologico tutta la regione di universo in *connessione causale* con noi. Una prima approssimazione di raggio dell'orizzonte cosmologico si ottiene banalmente come $R_H \approx c\Delta t$, tuttavia questo valore è più piccolo del raggio reale, poiché le regioni connesse causalmente hanno

un'estensione più vasta per via dell'espansione dell'universo, quindi la definizione formale risulta essere:

$$R_H(t) := a(t) \int_0^t \frac{cdt'}{a(t')}. \quad (1.49)$$

Per $t \rightarrow 0$ abbiamo che $a \rightarrow 0$, quindi, l'integrale potrebbe divergere in un raggio dell'orizzonte cosmologico infinito. Per ovviare al problema si tiene conto che R_H vicina allo zero vale:

$$R_H(t \sim 0) = \frac{c}{H_0 \Omega^{1/2}} \frac{2}{1+3w} \left(\frac{a(t)}{a_0} \right)^{\frac{3(1+w)}{2}} \quad (1.50)$$

nella quale se $a(t) \rightarrow 0$ il raggio $R_H \rightarrow 0$, da cui un orizzonte cosmologico finito che cresce nel tempo conseguentemente all'espansione dell'universo. Questo significa che ad un certo punto riceviamo radiazione solamente da una regione finita di spazio che cresce nel tempo. Una via alternativa a questo discorso consiste nel definire il raggio della sfera di Hubble, ovvero una misura dello spazio percorso dai fotoni dalla nascita dell'universo ad oggi:

$$R_{Hubble}(t) := c\tau = \frac{c}{H(t)}, \quad (1.51)$$

con $\tau := H^{-1}(t)$ tempo tipico di espansione dell'universo. In qualsiasi universo nel quale è contemplata un'espansione $R_H(t) \neq R_{Hubble}(t)$, ma si può dimostrare che più ci si avvicina al Big Bang e più i due raggi sono simili. La differenza nelle due misure sta che una tiene conto di tutta la storia evolutiva dell'universo, mentre l'altra tiene conto di tale espansione solo nell'istante t in cui viene misurato. Poiché l'espansione varia, la maniera corretta per misurare l'orizzonte cosmologico è tramite R_H . Ultima misura utile da definire è il raggio dell'orizzonte degli eventi, che in un certo senso è il complementare di quello cosmologico in quanto sta ad indicare tutta quella parte di universo che non è entrata ancora in connessione causale con noi. Esso è definito come nell'Eq. 1.49, cambiano solo gli estremi di integrazione, ovvero $0 \rightarrow t$ e $t \rightarrow t_{max}$. L'ultimo valore indica l'estensione temporale dell'universo. Per universi aperti o piatti $t_{max} \rightarrow \infty$, mentre nel caso di universo chiuso esiste un limite superiore ovvero l'età del Big Crunch. Se l'espansione continua all'infinito l'integrale diverge, ovvero, prima o poi, tutto l'universo entra in connessione causale con se stesso.

1.1.14 Modelli con costante cosmologica

Le osservazioni (Riess et al., 2016), in particolare quelle sulle distanze e velocità di allontanamento delle supernove di tipo Ia, hanno mostrato che l'universo sta aumentando la sua velocità di espansione; dal momento che questo è impossibile per un universo di sola materia si suppone che esista un'energia detta oscura che, in epoche relativamente recenti, domina sulle altre componenti e causa l'accelerazione dell'espansione. Un comportamento di questo tipo è prodotto dalla costante cosmologica. A questa componente, come visto, corrisponde una densità di energia costante che riempie omogeneamente lo spazio ed è fisicamente equivalente all'energia del vuoto. Consideriamo le Eq. 1.12 e 1.22. Siamo interessati al comportamento in prossimità di $z = 0$. Considerando inizialmente un universo fatto di esclusivamente di materia si ha che $w = 0$ e $p = 0$, da cui $\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_{crit}} = 8\pi G \frac{\rho_M}{3H^2} \rightarrow q = \frac{\Omega_M}{2} > 0$ sempre, quindi l'universo deve espandersi in maniera decelerata. Quanto detto prova che un universo di sola materia non è compatibile con l'espansione accelerata osservata.

Il contributo della costante cosmologica viene considerato sostituendo a pressione e densità nelle equazioni di Friedmann i seguenti valori:

$$\begin{cases} \tilde{\rho} = \rho_M + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \\ \tilde{p} = p_M - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} \end{cases} \quad (1.52)$$

con $p_M \sim 0$ trascurabile. Sostituendo l'Eq. 1.52 nell'equazione di Friedmann 1.22 otteniamo:

$$\ddot{a} = -aH^2 \frac{\Omega_M}{2} + aH^2 \Omega_\Lambda, \quad (1.53)$$

dove $\Omega_\Lambda := \frac{\Lambda c^2}{3H^2}$. Tenendo conto della definizione di parametro di decelerazione in Eq. 1.12 otteniamo:

$$q = -\frac{\ddot{a}}{aH^2} = \frac{\Omega_M}{2} - \Omega_\Lambda < 0. \quad (1.54)$$

Da quest'ultima si ricava la condizione per avere l'espansione accelerata, ovvero:

$$\Omega_\Lambda > \frac{\Omega_M}{2}. \quad (1.55)$$

Diversi esperimenti cosmologici indicano che $\Omega_M \sim 0.3$ e $\Omega_\Lambda \sim 0.7$, da cui deriva un valore per il parametro di decelerazione pari a $q \sim -0.55$. Tutto ciò mette in discussione quanto detto circa gli andamenti del fattore di scala nel caso di universi ad una sola componente, pertanto, il grafico in Fig. 1.4 non può andare bene per gli universi a più componenti, introdotti tramite la costante cosmologica. Sappiamo che la derivata seconda di a varia col tempo poiché passiamo da una concavità negativa e un comportamento EdS vicino al Big Bang, ad una concavità positiva a $z = 0$; questo significa che esisterà un tempo in cui $\ddot{a} = 0$ e quindi nel grafico sarà presente un flesso. Proviamo a stimare z_F a partire dall'Eq. 1.55. Inserendo in quest'ultima la definizione di parametro di densità introdotto nell'Eq. 1.30 e l'equazione di stato (1.34) dove $w = -1$ e $w = 0$ rispettivamente per costante cosmologica e per materia, si trova che $z_F \approx 0.68$.

1.2 Introduzione alla Teoria di Jeans

La formazione delle strutture nell'universo coinvolge sia la materia barionica che oscura ed è ben descritta dalla **Teoria di Jeans**, secondo la quale le strutture si originano da piccolissime fluttuazioni nella densità del fluido primordiale, rilevate nello spettro della CMB per la prima volta nel 1991 (dal satellite COBE) e la cui natura non è ancora ben compresa. Potrebbero essere legate alle fluttuazioni della gravità quantistica cui si accennava nell'introduzione. Queste oscillazioni, generate nell'epoca dell'inflazione, avrebbero portato a instabilità gravitazionali con un conseguente aumento dell'ampiezza delle fluttuazioni stesse e in ultimo al collasso delle strutture. La perturbazione di densità è una quantità adimensionale definita come

$$\delta := \frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{\rho - \bar{\rho}}{\bar{\rho}}, \quad (1.56)$$

dove $-1 \leq \delta < +\infty$ e $\bar{\rho}$ la densità media. Le fluttuazioni di temperatura della CMB ($z \approx 10^3$) corrispondono a delle perturbazioni di densità dell'ordine di 10^{-5} . Nell'attuale universo ($z = 0$) le perturbazioni di densità raggiungono valori superiori a 10^2 .

La responsabile di questa crescita è l'instabilità gravitazionale. Prima dell'era della materia tali instabilità non erano possibili dentro l'orizzonte a causa dell'accoppiamento tra materia e radiazione, troppo forte perché potesse avvenire il collasso. Il ruolo chiave è giocato dalla materia oscura. Essendo disaccoppiata dalla radiazione, la materia oscura collassa formando buche di potenziale ben prima della ricombinazione e guida il successivo addensamento della materia barionica.

L'espansione dell'universo genera però un feedback negativo. Pertanto l'efficienza del collasso dipenderà dal modello cosmologico assunto, che, in virtù di quanto detto nella Sez. 1.1, supponiamo sia quello di universo piatto con costante cosmologica.

Il primo tassello di questa teoria consiste nel definire il concetto di scala di Jeans che determina le caratteristiche che un agglomerato di materia deve avere per poter collassare. Sono presenti

due processi che si oppongono: la gravità che tende a far aggregare la materia e i moti associati all'energia termica delle particelle che tende a contrastare il collasso. Perché il collasso si realizzi è necessario che l'energia potenziale gravitazionale prevalga sull'energia cinetica. La scala caratteristica alla quale le energie sono uguali e c'è perfetto equilibrio è la scala di Jeans:

$$R_J := v \sqrt{\frac{1}{2G\rho}}, \quad (1.57)$$

dove ρ è la densità delle perturbazioni e v la velocità associata all'agitazione termica delle particelle. Non è quindi sufficiente avere delle sovradensità perché la materia collassi, le dimensioni delle perturbazioni devono superare la scala di Jeans, $R > R_J$, o equivalentemente $M > M_J$, dove $M_J \propto \rho R_J^3$

1.2.1 Universi statici

Il caso più semplice da trattare è quello degli universi composti da un fluido statico in presenza di un campo gravitazionale. Le equazioni che lo descrivono sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (v \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla \rho - \nabla \phi \quad (2) \\ \nabla^2 \phi = 4\pi G \rho \quad (3) \\ p = p(\rho, S) = p(\rho) \quad (4) \\ \frac{dS}{dt} = 0 \quad (5) \end{array} \right. \quad (1.58)$$

Con la condizione (5) abbiamo assunto che il sistema evolve adiabaticamente, un'ipotesi abbastanza ragionevole che porta alla scelta dell'equazione di stato (3), la quale dipende esclusivamente dalla pressione e dalla densità del fluido. Premesso ciò, possiamo considerare il sistema composto da 4 equazioni in 4 incognite. Assumiamo di conoscere una soluzione detta di *background* il cui valore è costante:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \text{cost} = \rho_b \\ p = \text{cost} = p_b \\ \phi = \text{cost} = \phi_b \\ \mathbf{v} = \text{cost} = 0 \end{array} \right. \quad (1.59)$$

In realtà, per soddisfare l'equazione di Poisson, dovrebbe essere $\rho_b = 0$. Nonostante questa inconsistenza non si hanno problemi nello sviluppo dei calcoli. In più questa incoerenza non è presente nel caso del modello non statico ma in espansione. Applichiamo ora alla soluzione in Eq. 1.59 una piccola perturbazione:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho_b + \delta\rho = \rho_b(1 + \delta) \\ p = p_b + \delta p \\ \phi = \phi_b + \delta\phi \\ \mathbf{v} = \delta\mathbf{v} \end{array} \right. \quad (1.60)$$

e vediamo come evolve il sistema. Le funzioni nell'ultimo sistema sono tutte di ordine uno, perché aver scelto di avere solo piccole perturbazioni fa sì che approssimare al primo ordine sia sufficiente: la teoria di Jeans è lineare, quindi tutti i termini del secondo ordine sono trascurabili. Una volta inserite le Eq. 1.60 nelle 1.58, dopo un po' di algebra si giunge al seguente risultato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta\rho}{\partial t} + \rho_b \nabla \cdot \delta\mathbf{v} = 0 \\ \frac{\partial \delta\mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_b} \nabla \delta\rho + \nabla \delta\phi \\ \nabla^2 \delta\phi = 4\pi G \delta\rho \end{array} \right. \quad (1.61)$$

L'idea di Jeans è quella di cercare delle soluzioni sotto forma di onde piane:

$$f(\mathbf{r}, t) = f_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \quad (1.62)$$

dove r è il vettore spaziale, t la coordinata temporale, f_k l'ampiezza, $k = 2\pi\hat{k}/\lambda$ il vettore d'onda e ω la frequenza angolare. Passando dallo spazio reale allo spazio delle trasformate di Fourier, le diverse grandezze diventano:

$$\begin{cases} \delta\rho(\mathbf{r}, t) = \delta\rho_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \delta\mathbf{v}_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta\phi(\mathbf{r}, t) = \delta\phi_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t) \\ \delta S(\mathbf{r}, t) = \delta S_k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i\omega t). \end{cases} \quad (1.63)$$

Questa strada è comoda perché così facendo gli operatori differenziali diventano tutte operazioni elementari, sostituendo il sistema 1.63 nel sistema 1.60, otteniamo:

$$\begin{cases} \omega\delta_k + \mathbf{k}\delta\mathbf{v}_k = 0 \\ c_s^2\mathbf{k}\delta_k + \omega\delta\mathbf{v}_k + \mathbf{k}\delta\phi_k = 0 \\ 4\pi G\delta_b\delta_k + k^2\delta\phi_k = 0 \end{cases} \quad (1.64)$$

dove le incognite sono le ampiezze delle onde che mi danno le fluttuazioni delle variabili ρ , v e ϕ . La soluzione del sistema si può trovare ponendo a zero il determinante della matrice rappresentativa:

$$\begin{pmatrix} \omega & \mathbf{k} & 0 \\ c_s^2\mathbf{k} & \omega & \mathbf{k} \\ 4\pi G\rho_b & 0 & k^2 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo così la **relazione di dispersione**:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 - 4\pi G\rho_b, \quad (1.65)$$

la quale lega la pulsazione delle onde piane alla velocità del suono nel mezzo e al vettore d'onda. A seconda della positività o della negatività del quadrato della pulsazione, si ha che la perturbazione non cresce ma si propaga con velocità di fase e ampiezza costante, o che la perturbazione fornisce una soluzione crescente (alla quale siamo interessati) o decrescente. Il valore che discrimina i due regimi è dato da $\omega^2 = 0$ dal quale, si ottiene la lunghezza scala nota come *scala di Jeans*:

$$\lambda_J = v_s \sqrt{\frac{\pi}{g\rho_b}}, \quad (1.66)$$

alla quale corrisponde la massa di Jeans:

$$M_J = \frac{4}{3}\pi\rho_b\lambda_J^3. \quad (1.67)$$

In sintesi i possibili scenari sono:

- $\lambda < \lambda_J$ onde che si propagano su una scala più piccola della scala di Jeans e che hanno $\omega^2 > 0$, il che significa che le soluzioni sono una coppia di onde sonore di ampiezza $\delta\rho_k$ che si propagano nel tempo con velocità di fase costante;
- $\lambda > \lambda_J$ in questo regime la lunghezza delle onde supera quella della scala di Jeans, $\omega^2 < 0$ porta a due diverse soluzioni che rappresentano le soluzioni crescenti e decrescenti accennate sopra: $\delta\rho(r, t) = \delta\rho_k \exp(\pm\omega t) \exp(ikr)$.

1.2.2 Universi piatti in espansione

Introducendo la **scala dell'orizzonte** entro la quale vale la microfisica e oltre la quale agisce solo la gravità, è possibile dare un significato cosmologico al discorso fatto nel paragrafo precedente. Oltre il raggio dell'orizzonte cosmologico, la perturbazione è sottoposta solo all'azione della forza gravitazionale e non risente di alcuna pressione di radiazione. Le perturbazioni su scale $R > R_h(t)$ crescono sempre, secondo la seguente legge:

$$\delta(t) = \frac{3c^2}{8\pi G a^2 \rho_b}, \quad (1.68)$$

la quale si ottiene considerando la perturbazione come una regione di universo contenuta in un universo EdS di background. La perturbazione dipende dalla densità di background, e quindi dalla densità della componente dominante, questo consente di innestare tutta la trattazione in due casi differenti:

- $t < t_{eq} \rightarrow \rho_b \propto a^{-4} \rightarrow \delta_R \propto a^2$
- $t > t_{eq} \rightarrow \rho_b \propto a^{-3} \rightarrow \delta_M \propto a.$

Analizzare gli universi in espansione richiede una modifica del parametro \mathbf{v} nel sistema 1.60 in modo tale da tenere conto dell'espansione dell'universo. I possibili scenari sono:

- prima dell'equivalenza, l'universo è dominato dalla radiazione e la relazione di dispersione associata al caso è la seguente:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + (k^2 v_s^2 - \frac{32}{3}\pi G \rho_b)\delta_k = 0 \quad (1.69)$$

dove $2\frac{\dot{a}}{a}$ è detta *frizione di Hubble*. Risolvendo la relazione di dispersione si trova che prima dell'equivalenza $\lambda_J(t) > R_h(t)$, il che significa che dentro il raggio dell'orizzonte non esistono instabilità gravitazionali, dal momento che $c_s \approx c$ e la pressione è abbastanza forte da cancellare le fluttuazioni di densità

- dopo l'equivalenza, l'universo è dominato dalla materia e l'equazione di evoluzione delle perturbazioni è:

$$\ddot{\delta}_k + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}_k + (k^2 v_s^2 - 4\pi G \rho_b)\delta_k = 0. \quad (1.70)$$

Quest'ultima differisce dall'Eq. 1.69 per un fattore numerico dovuto al contributo della pressione della materia, trascurabile rispetto a quello apportato dalla pressione di radiazione. Le sue soluzioni sono date da $\delta_k \propto t^\alpha$ con

$$\alpha_{1,2} = \frac{-1 \pm 5\sqrt{1 - (\lambda_J/\lambda)^2}}{6} \quad (1.71)$$

e la scala di Jeans è pari a:

$$\lambda_J(t) = \frac{c_s}{5} \sqrt{\frac{24\pi}{G\rho_b}}. \quad (1.72)$$

Così come nel caso degli universi statici, quando $\lambda < \lambda_J$ le perturbazioni si propagano con ampiezza costante, quando $\lambda > \lambda_J$ si hanno le soluzioni crescenti e decrescenti. Se parliamo di materia oscura, il termine c_s perde di significato, poichè quest'ultima è non collisionale per definizione. Al suo posto viene usata la dispersione di velocità delle particelle.

1.2.3 Massa di Jeans per HDM e CDM

Come detto, la scala di Jeans è determinata dalle velocità delle particelle di materia oscura. Possiamo distinguere diversi scenari, a seconda del valore di tale velocità al momento del disaccoppiamento della materia oscura dalla componente radiativa. Se al momento del disaccoppiamento le particelle sono non relativistiche, quindi più massive, si parla di materia oscura fredda (Cold Dark Matter, CDM). Viceversa si parlerà di materia oscura calda (Hot Dark Matter, HDM). In virtù di quanto detto sopra risulta evidente che $\lambda_{J,HDM} \gg \lambda_{J,CDM}$. Quindi il massimo valore di M_J al momento dell'equivalenza è più alto per la HDM rispetto alla CDM. Nel primo caso è dell'ordine di $10^{15-16}M_\odot$ e nel secondo di $10^{5-6}M_\odot$. Per i barioni invece il valore massimo di M_J è raggiunto al momento del loro disaccoppiamento dalla radiazione ed è $3 \cdot 10^{16}M_\odot$. Tutto ciò ha una forte implicazione sugli scenari di formazione delle strutture cosmiche, perché se la materia oscura che ha portato alla formazione delle prime strutture fosse stata del tipo *caldo* avrebbe portato a strutture molto più grandi delle galassie e degli ammassi, che a questo punto si sarebbero formate per frammentazione, secondo quello che è noto come modello *top-down*; se invece la materia oscura fosse stata del tipo *fredda*, le strutture cosmiche si sarebbero formate per aggregazione di sottostrutture più semplici tramite *merging*, secondo il modello *bottom-up*. Le osservazioni favoriscono il modello bottom-up, dal momento che le strutture ad alto z , e quindi le più vecchie, sono anche quelle più piccole. Anche per la materia oscura esistono delle scale di dissipazione, il fenomeno è noto come *free-streaming* al quale è associato la massa di *free-streaming*, che indica la scala di dissipazione e ha un andamento uguale a quello della massa di Jeans, dal momento che la fisica alla base è la stessa.

La massa di Jeans indica la scala sotto la quale la pressione impedisce il collasso, mentre la massa di free-streaming è la scala dei fenomeni oscillatori che lo smorzano. La scala al di sotto della quale i fotoni smorzano le perturbazioni dei barioni è detta *scala di Silk* alla quale corrisponde la *massa di Silk*.

Contrariamente al caso della materia oscura, la massa di Silk non ha lo stesso andamento della massa di Jeans ma è leggermente inferiore, cosicché alcune perturbazioni oscillano fino al redshift di disaccoppiamento e poi ricominciano a crescere, in particolare:

- perturbazioni barioniche con $M > 10^{16}M_\odot h^{-1}$ crescono sempre;
- perturbazioni con $10^{12} < M < 10^{16}M_\odot h^{-1}$ collassano fino a quando $M > M_J$, poi oscillano per ricominciare a crescere dopo il momento del disaccoppiamento;
- le perturbazioni con $M < 10^{12}M_\odot h^{-1}$ crescono, oscillano quando $M < M_J$ e infine vengono cancellate quando la scala di Silk supera la loro scala.

1.3 Introduzione alla teoria delle perturbazioni

Nella fasi finali dell'era dell'inflazione vengono generate, con una distribuzione stocastica e quasi gaussiana, le fluttuazioni di cui abbiamo parlato finora. Quando nello spazio di Fourier si hanno delle fasi casuali, la probabilità di avere una fluttuazione $P(\delta)$ è rappresentato da una gaussiana. La matematica ci insegna che per avere una buona statistica dovremmo avere un campione sufficientemente grande. Ovviamente non è il nostro caso dal momento che abbiamo un solo universo nel nostro campione e il fenomeno non è riproducibile, dunque dobbiamo cambiare approccio.

δ è una funzione della posizione e se la misuriamo in posizioni diverse dell'universo avremmo che, la probabilità di avere una perturbazione in un dato punto è una distribuzione gaussiana, quindi definibile in termini di media e varianza. Essendo però la media delle fluttuazioni nulla per definizione, l'unico valore di interesse è la varianza $\langle \delta^2(x) \rangle$. Per risolvere il problema della bassa statistica è necessario introdurre l'*ipotesi ergodica*, secondo la quale la media tra più

volumi equivale alla media spaziale tra sottovolumi sufficientemente grandi e non sovrapposti di un unico volume (Coles & Lucchin, 2002). In altre parole questo significa che, grazie alle sue caratteristiche di omogeneità, l'universo può essere considerato un "insieme di universi", dal momento che le regioni sufficientemente separate possono considerarsi tra loro statisticamente indipendenti; l'ipotesi ergodica in seno al principio cosmologico prende il nome di **ipotesi fair sample**.

Il valore minimo che può avere la densità è zero, pertanto:

$$\delta_{min} = \frac{\rho_{min} - \bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -\frac{\bar{\rho}}{\bar{\rho}} = -1. \quad (1.73)$$

Quindi dovrà per forza essere $-1 < \delta < +\infty$. Se $P(\delta)$ è gaussiana, allora la distribuzione sarà troncata a -1 . Sostanzialmente esistono due approcci per affrontare un'analisi statistica, considerando il campo delle fluttuazioni $\delta(x)$ nello spazio reale, oppure considerando la sua trasformata nello spazio di Fourier:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{k} \quad (1.74)$$

$$\delta(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \delta(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (1.75)$$

1.3.1 Funzione di correlazione e spettro di potenza

In meccanica statistica con *funzione di correlazione* si intende una misura del livello di ordine di un sistema che descrive come sono collegate le variabili microscopiche in punti diversi del sistema. In particolare essa misura come *covariano* le fluttuazioni δ in media nello spazio-tempo. Tale funzione è definita come:

$$\xi(r) := \langle \delta(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle \quad (1.76)$$

e sta ad indicare la media del prodotto tra due valori del campo delle fluttuazioni, presi in due punti che distano r l'uno dall'altro. Se riscriviamo la stessa facendo uso delle trasformate di Fourier si ha che:

$$\langle \delta(\mathbf{k})\delta^*(\mathbf{k}') \rangle := (2\pi)^3 P(k) \delta_D^{(3)}(\mathbf{k} + \mathbf{k}'), \quad (1.77)$$

dove $P(k)$ è detto spettro di potenza, l'equivalente nello spazio di Fourier della funzione di correlazione nello spazio reale; la differenza fisica sta nel fatto che $\xi(r)$ è adimensionale mentre $P(k)$ ha le dimensioni $[L^3]$. Sfruttando la proprietà delle trasformate di Fourier secondo la quale $\delta^*(k) = \delta(-k)$, visto che δ è reale, è possibile affermare che:

$$P(k) \propto \langle \delta(\mathbf{k})\delta(\mathbf{k}') \rangle \propto \langle \delta^2(\mathbf{k}) \rangle, \quad (1.78)$$

dalla quale emerge che lo spettro di potenza ci dà una misura quadratica media dell'ampiezza di un'onda che ha vettori d'onda \mathbf{k} , a meno di un fattore di normalizzazione che non è nient'altro che il volume dell'universo. Equivalentemente lo spettro di potenza è una misura della densità di potenza delle fluttuazioni di scala k , dove k è il numero d'onda delle onde piane di lunghezza d'onda $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. È possibile definire la varianza del campo puntuale come l'integrale dello spettro di potenza su tutto lo spazio di Fourier a meno di un fattore $1/(2\pi)^3$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty k^2 P(k) d^3k. \quad (1.79)$$

Il campo di densità può essere stimato dal conteggio di galassie in regioni di data ampiezza. Infatti la fluttuazione del numero di galassie in un certo volume V è

$$\delta_g := \frac{N_g(V) - \bar{N}_g(V)}{\bar{N}_g(V)} \propto \frac{M_g(V) - \bar{M}_g(V)}{\bar{M}_g(V)} \equiv \delta_M. \quad (1.80)$$

Non è detto che le galassie siano dei traccianti perfetti della materia. In generale, si assume che

$$\delta_g \propto b\delta_M, \quad (1.81)$$

dove b è detto parametro di bias. Nel parametro b è contenuta la nostra ignoranza circa i processi di formazione delle galassie.

Anche δ_M avrà una distribuzione gaussiana descritta dalla sola varianza, detta di massa, simile a quella puntuale definita come:

$$\sigma_M^2 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3(\mathbf{k}) \langle P(k) \rangle \hat{W}^2(\mathbf{k}, R) \quad (1.82)$$

dove $W(\mathbf{k}, R)$ è una funzione filtro. Più piccolo è il filtro, più la varianza di massa si avvicina a quella puntuale quindi ad una distribuzione che ricalca quella della densità di materia oscura. Viceversa con un filtro grande la varianza di massa diventa piccola e avremo una gaussiana che degenera in una delta di Dirac, come se la massa dell'universo fosse tutta concentrata in un punto:

$$\begin{cases} \sigma_M^2 \rightarrow \sigma^2 & R \rightarrow 0 \\ \sigma_M^2 \rightarrow 0 & R \rightarrow \infty \end{cases} \quad (1.83)$$

1.3.2 Relazioni di scala

Funzione di correlazione, varianza puntuale e varianza di massa, sono tutte quantità legate allo spettro di potenza. Abbiamo già avuto modo di parlare del fatto che le fasi finali di oscillazione dell'inflazione determinano la formazione di fluttuazioni nel campo di densità, dunque lo spettro iniziale di tali fluttuazioni deve essere quello imposto dall'inflazione. Nell'era inflativa non esistono scale privilegiate. Dunque lo spettro di potenza si assume avere semplicemente le proprietà di una legge di potenza:

$$P(k) = Ak^n, \quad (1.84)$$

dove n è l'indice spettrale e A l'ampiezza che va calibrata studiando, ad esempio, la CMB. Abbiamo visto come le fluttuazioni che si formano con un'ampiezza primordiale $\delta_i = \delta(\mathbf{x}, t_i)$, ad un tempo successivo $t > t_i$ sono cresciute seguendo l'andamento della soluzione crescente nella relazione di dispersione, $\delta(t) = \delta_i \delta_+(t)$, tale relazione non porta con sé alcuna dipendenza dalla scala. Questo è sempre vero a patto che indaghiamo su scale più grandi della scala di Jeans, altrimenti non si avrebbe crescita. Fatte queste premesse possiamo dire come evolve nel tempo la varianza in massa dello spettro di potenza, ovvero:

$$\sigma_M^2 \propto \delta_+^2(t) k^{3+n}, \quad (1.85)$$

dove la dipendenza dal tempo è contenuta nel primo termine e quella dallo spazio nel secondo. δ_+ un risultato della teoria di Jeans e dipende dalla cosmologia; in universo EdS, ad esempio, la dipendenza dal tempo della varianza di massa oltre che essere lineare dipende dal redshift, ovvero $\delta_+ \propto (1+z)^{-1}$. Dal momento che le strutture formate non sono lineari, ci chiediamo quando il regime di evoluzione delle perturbazioni sia passato da lineare a non lineare. Per fare ciò abbiamo bisogno delle *relazioni di scala non lineari* che raccogliamo nel seguente sistema:

$$\begin{cases} M_* := [\delta_+(t)]^{\frac{6}{3+n}} \\ \rho_* \propto \rho_b(t) \propto a^{-3} \propto (1+z)^3 \\ R_* \propto (M_*/\rho_*)^{1/3} \propto M_*^{1/3} (1+z)^{-1} \\ \langle v^2 \rangle \propto k_B T_{vir} \propto M_*^{1/3} \rho_*^{1/3} \propto M_*^{(1-n)/6} \end{cases} \quad (1.86)$$

Queste ultime mettono in relazione gli osservabili delle strutture formate e sono valide quando la gravità è l'unica forza ad aver contribuito alla loro formazione. È grazie a queste relazioni e

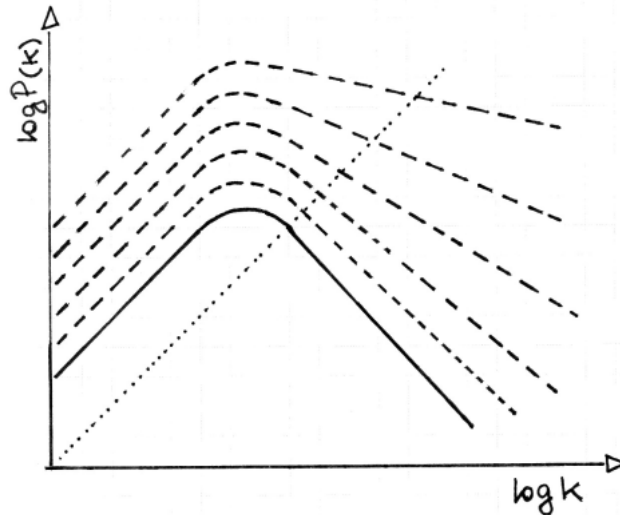


Figura 1.6: Evoluzione dello spettro di potenza.

alla loro dipendenza dall'indice spettrale n che possiamo riporre fiducia nel fatto che ad esempio la temperatura in banda X di un ammasso sia un tracciante della sua massa o che lo sia la sua dispersione di velocità.

Arrivati a questo punto sorge spontaneo chiedersi quali siano le strutture che per prime si formano nell'universo. Se $n > -3$ allora la massa sarà una funzione decrescente del redshift e crescente del tempo, ovvero avremo un clustering gerarchico. Ovviamente anche l'energia coinvolta deve crescere con la massa. L'informazione energetica proviene dalla dispersione di velocità, quindi affinché $\langle v^2 \rangle$ cresca deve essere $n < 1$. Avremo il clustering gerarchico solo se entrambe le relazioni sono verificate, ovvero quando $-3 < n < 1$. Se accettiamo il modello dell'inflazione le perturbazioni vengono prodotte con uno spettro che va come $n = 1$, detto *spettro di Zel'dovich*; tuttavia le relazioni di scala che si osservano nella realtà non coincidono con quelle che si ottengono sostituendo il suddetto indice spettrale. Quanto appena detto non dovrebbe stupirci, perché più volte abbiamo sottolineato che la nostra teoria assume solo l'azione della gravità, in contraddizione con quanto succede negli ammassi di galassie, nei quali gli effetti dovuti all'astrofisica del gas non sono trascurabili. Concludiamo commentando la Fig. 1.6 dove è mostrato l'andamento dello spettro di potenza in diverse epoche. La curva punteggiata sta ad indicare lo spettro primordiale creato al momento dell'inflazione. La curva continua rappresenta lo spettro modificato dalla microfisica all'epoca dell'equivalenza. Nel momento in cui le perturbazioni entrano nell'orizzonte in epoca precedente all'equivalenza, si genera un effetto di stagnazione per effetto dell'intenso campo di radiazione; questo porterà inevitabilmente ad una modifica dello spettro di potenza primordiale. Tale processo termina con l'equivalenza, momento in cui la radiazione non è più dominante e quindi il contributo della microfisica al bilancio dinamico complessivo diventa trascurabile. Le linee tratteggiate rappresentano l'evoluzione dopo l'equivalenza con una legge indipendente dalla scala. Poiché le fluttuazioni della CMB sono dell'ordine di 10^{-5} all'epoca dell'equivalenza dovevano essere ancora più piccole e quindi in pieno regime lineare.

1.4 Evoluzione in regime non lineare

Negli istanti successivi all'equivalenza si ha una crescita *self similar* con un fattore a^2 . Le fluttuazioni continuano a crescere finché $\delta \approx 1$ (equivalentemente $\sigma_M \approx 1$, momento in cui l'approssimazione lineare non è più valida e bisogna ricorrere alle simulazioni numeriche per capire come

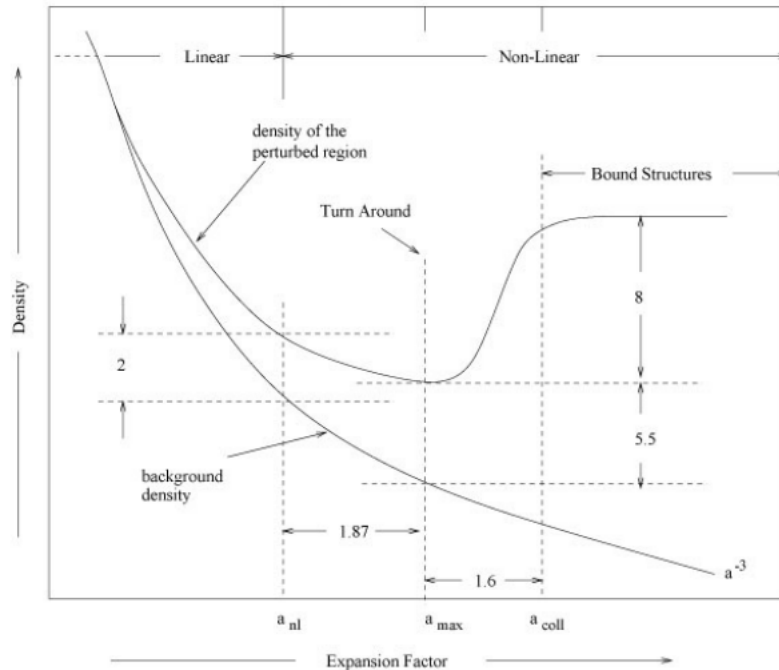


Figura 1.7: Evoluzione in regime non lineare di una perturbazione sferica immersa in un universo EdS (Padmanabhan, 2002).

evolve lo spettro di potenza. Riguardando la Fig. 1.6 si nota che la crescita non è esattamente *self similar* come detto nella Sez. 1.3.2. Questo è attribuibile al fatto che il passaggio di regime deforma lo spettro al crescere di k con un effetto complessivo di *innalzamento*. Le masse più grandi continuano ad evolvere *parallelamente*, quelle più piccole più velocemente. Tramite le simulazioni numeriche si può capire come evolvono le perturbazioni e, in accordo con lo scenario del clustering gerarchico, si trova che quelle della materia oscura sono le prime che raggiungono il range di non linearità. L'unico modo per trattare il problema analiticamente consiste nel considerare il caso molto semplice del collasso sferico, la cui idea di base è trattare la perturbazione come un universo chiuso e sferico immerso in un universo di background del tipo EdS. Guardando la Fig. 1.7 è possibile apprezzare come la perturbazione inizialmente evolve espandendosi ma più lentamente rispetto all'universo circostante, fino a quando non viene raggiunto il punto di *turn-around* al tempo t_{max} , quando $\delta(t_{max}) \sim 4.6$, momento in cui ha inizio la contrazione che porta alla formazione delle prime strutture, $\delta(t_{collapse}) \sim 400$.

Pur essendo fondamentale per farci un'idea di che cosa significhi avere un collasso, questa trattazione risulta poco realistica in quanto la sfericità della fluttuazione è chiaramente impossibile (si ottengono dei risultati più realistici assumendo una simmetria ellissoidale). Infine è bene notare che l'universo assunto come background è piatto, perché si avrebbero dei risultati diversi a seconda della curvatura adottata, a differenza della teoria in regime lineare, i cui risultati sono quasi indipendenti dalla geometria.

Una descrizione accurata si può avere solo ricorrendo alle simulazioni numeriche grazie alle quali è possibile simulare le fluttuazioni di materia oscura e identificare delle strutture morfologicamente e fisicamente compatibili con gli ammassi di galassie osservati.

1.4.1 Funzione di massa

Per testare qualsiasi modello cosmologico è necessario metterlo in relazione con degli osservabili e vedremo che uno dei modi migliori per farlo è definire la *funzione di massa delle strutture*

cosmiche:

$$n(M)dM \quad (1.87)$$

che ci dà il numero di oggetti che hanno una massa compresa tra M e $M + dM$ ad un determinato tempo per unità di volume. Questa funzione può essere convertita in una *funzione di luminosità* dato un certo valore per il rapporto massa su luminosità M/L , che analogamente ci permette di stabilire il numero di oggetti con una determinata luminosità che è possibile osservare ad un determinato tempo per unità di volume di universo.

Per quanto discusso finora l'universo nasce con una distribuzione delle fluttuazioni di densità praticamente gaussiana (troncata per $\delta = -1$). Mentre tali fluttuazioni evolvono, il picco della distribuzione originale si abbassa e la larghezza della stessa aumenta. In termini di massa anziché di densità vale la seguente distribuzione:

$$P(\delta_M)d\delta_M = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_M^2}} \exp\left(-\frac{\delta_M^2}{2\sigma_M^2}\right) d\delta_M. \quad (1.88)$$

Le strutture caratterizzate da $\delta > \delta_c$, dove $\delta_c \simeq 1.68$, si trovano nella regione delle alte densità della distribuzione di δ , in accordo con la teoria lineare del collasso sferico. Nel 1974 Press e Schechter trovarono un modo generale per esprimere la funzione di massa (Press & Schechter, 1974), valido per qualsiasi assunzione dello spettro di potenza e dipendente dal redshift:

$$n(M, z)dM = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\delta_c}{\sigma_M(M, z)} \frac{\bar{\rho}_M(z)}{M^2} \left| \frac{d \ln \sigma_M}{d \ln M} \right| \exp\left[-\frac{\delta_c^2}{2\sigma_M^2(M, z)}\right] \quad (1.89)$$

nella quale la cosmologia è chiamata in causa tramite $\bar{\rho}_M(z)$ e σ_M . Assumendo uno spettro di potenza $P(k) \propto k^n$, si arriva alla seguente forma:

$$n(M) = \frac{2}{\pi} \frac{\rho_M \alpha}{M_*^2} \left(\frac{M}{M_*}\right)^{\alpha-2} \left[-\left(\frac{M}{M_*}\right)^{2\alpha}\right], \quad (1.90)$$

con $\alpha = (n + 3)/6$. Esistono così due regimi distinti per la funzione di massa. Per $M \ll M_*$ l'andamento è a $M^{\alpha-2}$; per $M > M_*$ l'andamento è invece descritto da una funzione esponenziale. M_* dipende da z e dal modello cosmologico adottato. Fissato z , le perturbazioni evolvono più velocemente in universo EdS piuttosto che in uno scenario Λ CDM. Tuttavia la funzione di massa è poco sensibile alla forma dello spettro di potenza, poichè $P(k) = Ak^n T^2(k)$, dove A è detta ampiezza, k^n è definito dall'inflazione e $T^2(k)$ dalla microfisica. Il parametro che conterebbe più informazioni di tutti è l'ampiezza, ma essendo totalmente libero non è direttamente collegato a $P(k)$. Per questo motivo si preferisce usare:

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2} \int k^2 Ak^n T^2(k) W^2(kR) dk \quad (1.91)$$

che diversamente da A è una costante adimensionale; storicamente si usa σ_8 , cioè $\sqrt{\sigma_R^2}$ con $R = 8h^{-1} Mpc$.

Bibliografia

- Coles, P., & Lucchin, F. 2002, *Cosmology: The Origin and Evolution of Cosmic Structure* (Wiley).
<https://books.google.it/books?id=uUFVb-DHtCwC> 18
- Grillo, C., Rosati, P., Suyu, S. H., et al. 2018, *Astrophysical Journal*, 860, 94, doi: [10.3847/1538-4357/aac2c9](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aac2c9) 2
- Hubble, E. 1929, *Proceedings of the National Academy of Science*, 15, 168, doi: [10.1073/pnas.15.3.168](https://doi.org/10.1073/pnas.15.3.168) 2
- Padmanabhan, T. 2002, *Theoretical Astrophysics - Volume 3, Galaxies and Cosmology*, 638, doi: [10.2277/0521562422](https://doi.org/10.2277/0521562422) 21
- Peebles, P. J., & Ratra, B. 2003, *Reviews of Modern Physics*, 75, 559, doi: [10.1103/RevModPhys.75.559](https://doi.org/10.1103/RevModPhys.75.559) 7
- Planck Collaboration, Ade, P. A. R., Aghanim, N., et al. 2016, 594, A13, doi: [10.1051/0004-6361/201525830](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830) 2, 7
- Press, W. H., & Schechter, P. 1974, *Astrophysical Journal*, 187, 425, doi: [10.1086/152650](https://doi.org/10.1086/152650) 22
- Riess, A. G., Macri, L. M., Hoffmann, S. L., et al. 2016, *The Astrophysical Journal*, 826, 56, doi: [10.3847/0004-637x/826/1/56](https://doi.org/10.3847/0004-637x/826/1/56) 2, 12