

# **Alma Mater Studiorum - Università di Bologna**

---

Scuola di Scienze  
Corso di Laurea in Astrofisica e Cosmologia

**Microlensing gravitazionale  
uno strumento per la ricerca di DM barionica**

A cura di  
Roberto Caione

Esame di Relatività  
Prof. Roberto Casadio

## **Indice**

<b>1</b>	<b>Test per la Relatività Generale e non solo</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Limite Newtoniano dell'angolo di deflessione</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>L'equazione della lente</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Microlensing gravitazionale</b>	<b>7</b>
<b>5</b>	<b>Risultati di MACHO, EROS e OGLE</b>	<b>9</b>

## 1 Test per la Relatività Generale e non solo

Nel 1911, mentre era ancora coinvolto nello sviluppo della Teoria della Relatività Generale, Einstein fece il primo calcolo della deviazione della luce da parte del Sole. Egli comprese correttamente che un corpo massiccio può agire come una lente gravitazionale e può deviare i raggi luminosi quando questi ultimi lo intercettano, ma, il calcolo basato sulla meccanica Newtoniana, diede un angolo di deviazione errato per un fattore due.

Il 14 ottobre 1913, Einstein scrisse ad Hale, un astronomo statunitense, chiedendo se era possibile misurare un angolo di deviazione di circa  $0.87''$  verso il Sole. La risposta fu negativa, ma Einstein non si arrese, e quando nel 1915 rifece il calcolo utilizzando la teoria della Relatività Generale, trovò il giusto valore, ovvero circa  $1.75''$ . Questo risultato fu clamorosamente confermato da Sir Arthur Eddington durante l'eclissi solare del 29 Maggio 1919.

Nel 1924, Chwolson considerò il caso particolare di quando sorgente, lente e osservatore sono allineati e teorizzò la possibilità di osservare un anello luminoso quando una sorgente lontana subisce l'effetto lente da parte di una stella massiccia.

Nel 1936, dopo l'insistenza di Rudi Mandl, Einstein pubblicò un documento su Science descrivendo l'effetto lente gravitazionale di una stella su un'altra stella e la relativa formazione dell'anello luminoso, oggi chiamato anello di Einstein [1]. Lo scienziato considerò questo effetto estremamente curioso e inutile, dal momento che, a suo parere, non c'era speranza di osservarlo; si sbagliava.

Zwicky comprese subito che le galassie sono lenti gravitazionali più potenti delle stelle e che possono dar luogo ad immagini con una separazione angolare rilevabile. In due lettere pubblicate nel 1937, notò che l'individuazione di lenti galattiche, oltre a dare un'ulteriore sostegno alla teoria della Relatività Generale, permetteva l'osservazione di fonti altrimenti invisibili, grazie all'amplificazione gravitazionale della luce. In questo modo si poteva anche ottenere una stima diretta e più precisa della massa dinamica della galassia che fungeva da lente gravitazionale. Egli ha anche scoperto che la probabilità di osservare lenti galattiche era molto più grande di quella delle stelle. Ciò dimostra la lungimiranza di questo scienziato eclettico, dal momento che il primo evento lenticolare è stato osservato solo nel 1979 [2].

Esistono diverse scale di lente gravitazionale a seconda della dimensione intrinseca delle immagini multiple che si formano durante un evento. Quando la distanza angolare delle immagini è di pochi micro arcosecondi, le immagini multiple non possono essere risolte come immagini singole, ma, cambia solo il flusso osservato pur rimanendo invariata la luminosità intrinseca. In questo regime si parlerà di microlente gravitazionale o *microlensing*, la cui caratteristica principale è quindi un aumento del flusso osservato secondo una legge detta *curva di Paczinsky*. Quando la distanza angolare tra le immagini è dell'ordine di alcune decine di secondi d'arco, esse sono osservabili con un telescopio e si parlerà di effetto lente gravitazionale forte o *strong lensing*. Per ultimo si ha l'effetto lente gravitazionale debole o *weak lensing* quando un campo gravitazionale distorce debolmente la forma degli oggetti di fondo. In tutti e tre i casi si ha a disposizione un potente mezzo di indagine del campo gravitazione generato da oggetti piccoli come un pianeta o grandi come una galassia o un ammasso di galassie e tutto questo gioca un ruolo estremamente

importante per la comprensione dell'evoluzione della struttura del cosmo e dei suoi misteri come la materia oscura.

In generale, si possono distinguere due tipi di materia oscura, barionico e non barionico. Nell'ultima sezione di questo approfondimento si cercherà di far vedere come il microlensing sia un potente strumento di rivelazione della materia oscura barionica e si illustreranno i risultati degli esperimenti MACHO, EROS e OGLE.

## 2 Limite Newtoniano dell'angolo di deflessione

Si consideri una stella di massa  $M$  ed un fotone  $\gamma$ , trattato come una particella avente massa  $m \ll M$ , proveniente dalla sorgente luminosa  $S$  e percepito dall'osservatore  $O$  dopo essere stato deviato da  $M$ . L'angolo  $\phi$  rappresenta la deviazione angolare del fotone tra la direzione originaria di  $S$  e quella apparente dell'immagine (si veda la figura 1). Il segmento  $b$ , detto parametro d'impatto, rappresenta invece la minima distanza del fotone  $\gamma$  dalla lente  $M$ . In generale la legge di gravitazione universale afferma:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{r}, \quad (1)$$

dove  $\hat{r}$  è il vettore unitario con origine in  $M$  che punta il fotone in  $(b, y)$ . Si consideri ora

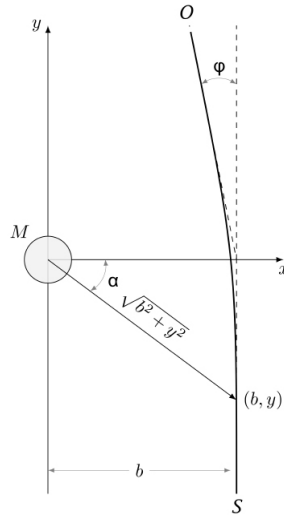


Figura 1: Deflessione Newtoniana per un generico fotone  $\gamma$  di massa  $m \ll M$  generata dalla lente gravitazionale  $M$ .

la componente  $F_x$  perpendicolare alla direzione iniziale del moto di  $m$ ,

$$F_x = \frac{GmM}{r^2} \cos \alpha, \quad (2)$$

con  $\alpha$  come in figura. Per piccoli angoli di curvatura  $\phi$  si ha  $r \simeq (b^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$  e  $\cos \alpha \simeq \frac{b}{r}$ , dunque:

$$F_x = \frac{GmM}{(b^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3)$$

Per la seconda legge della dinamica vale  $F_x = m \frac{dv_x}{dt}$ , quindi:

$$\frac{dv_x}{dt} = -GM \frac{b}{(b^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

da cui, integrando su tutto l'intervallo di tempo, si ottiene un valore finale della velocità  $v_x$  pari a:

$$v_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{GMb}{(b^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \frac{2GMb}{c} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(b^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2GM}{bc}, \quad (5)$$

avendo posto  $dt \approx \frac{dx}{v}$  e tenuto conto che, trattandosi di un fotone,  $v_y = c$ ; si tenga presente che tale risultato si sarebbe ottenuto anche senza integrazione, cioè assumendo  $|\vec{F}|$  costante. L'angolo di curvatura Newtoniano  $\phi_N$  per una lente puntiforme è quindi (si veda la figura 2):

$$\alpha_N = \frac{v_x}{c} = \frac{2GM}{bv^2} = \frac{2GM}{bc^2}, \quad (6)$$

dove si è assunto che la direzione dei vettori di velocità del fotone prima e dopo l'interazione sia parallela, rispettivamente, alla direzione di propagazione iniziale e finale. Come

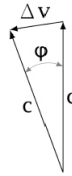


Figura 2:  $\delta v = c\phi$

si evince dalla forma di  $v_x$ , questo risultato è indipendente dalla massa  $m$ ; se si assume  $b = R$ , e con  $R$  si considera il raggio del Sole pari a circa  $700.000 km$  e  $M \simeq 2 \times 10^{30} kg$ , la deflessione angolare di un fotone è:

$$\alpha \simeq \frac{2GM}{Rc^2} = \frac{r_s}{R} \simeq 0.87'', \quad (7)$$

dove  $r_s$  è detto *raggio di Schwarzschild* e vale proprio  $\frac{2GM}{c^2}$ . Questo è il risultato errato ottenuto con la meccanica Newtoniana.

Il risultato corretto, ottenuto a partire dall'equazione di campo di Einstein e applicando il principio di Fermat come nell'ottica geometrica, è il seguente:

$$\alpha_S = 2\alpha_N = \frac{4GM}{bc^2} = \frac{2r_s}{b} \simeq 1.75'', \quad (8)$$

quindi esattamente il doppio dell'angolo  $\phi_N$ ; il fatto che sia esattamente il doppio rappresenta la prova che sia le coordinate spaziali che temporali sono deflesse in prossimità di un corpo massivo, detto in altre parole, il campo gravitazionale generato dal Sole deforma lo spazio-tempo nelle sue vicinanze [3].

### 3 L'equazione della lente

Nella teoria della Relatività Generale, i raggi di luce seguono delle geodetiche nulle che corrispondono a traiettorie percorse con il minimo tempo di percorrenza. Quando un raggio di luce proveniente da una sorgente lontana interagisce col campo gravitazionale dovuto ad un corpo massiccio, esso è deviato di un angolo approssimativamente uguale ad  $\alpha_s(b) = 2r_s/b$ . Assumendo un caso ideale di lente sottile (vedi fig.3) e notando che  $\alpha_s(b) = (\vartheta - \vartheta_S)D_S$ , si deriva quella che è chiamata equazione delle lenti:

$$\vartheta_S = \vartheta - \frac{\vartheta_E^2}{\vartheta} \quad (9)$$

dove  $\vartheta_S$  indica la posizione della sorgente e

$$\vartheta_E = \sqrt{\frac{4GM}{c^2} \frac{D_{LS}}{D_L D_S}} \quad (10)$$

è il raggio dell'anello di Einstein ovvero il raggio angolare dell'immagine che si forma quando lente e sorgente sono perfettamente allineate ( $\vartheta_S = 0$ );

In generale, la deflessione della luce prodotta da una distribuzione di materia generica è regolata dalla legge

$$\vartheta_S = \vartheta - \nabla\phi(\vartheta) \quad (11)$$

dove  $\vartheta_S$  rappresenta la posizione angolare e bidimensionale della sorgente rispetto ad un sistema di riferimento e  $\vartheta$  indica la posizione dell'immagine. Nella relazione precedente  $\phi = \frac{2D_{LS}\phi_N^{2D}}{D_S c^2}$  è il potenziale di lensing dove  $\phi_N^{2D}$  è la proiezione bidimensionale del potenziale gravitazionale della lente. Il rapporto  $\frac{D_{LS}}{D_S}$  dipende dal redshift della sorgente e dalla lente, così come dai parametri cosmologici  $\Omega_M = \frac{\rho_M}{\rho_c}$  e  $\Omega_\lambda = \frac{\rho_\lambda}{\rho_c}$  con  $\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$ , dove  $\rho_c$  è detta densità critica,  $\rho_M$  e  $\rho_\lambda$  sono rispettivamente le densità critiche di materia ed energia oscura e  $H_0$  la costante di Hubble. Lo Jacobiano della trasformazione è dato da:

$$J = \frac{d\vartheta_s}{d\vartheta} = A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \phi_{,11} & -\phi_{,12} \\ -\phi_{,21} & 1 - \phi_{,22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - k - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - k + \gamma_1 \end{pmatrix} \quad (12)$$

dove le virgole stanno a indicare le derivate parziali rispetto alle due componenti di  $\vartheta$ ,  $k$  è la convergenza, uguale a  $\frac{\sum}{2 \sum_{cr}}$  con:

$$\sum_{cr} = \frac{c^2 D_S}{4\pi G D_L D_{LS}} \quad (13)$$

detta densità superficiale critica,  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  è detto shear e  $A$  matrice di ingrandimento. Convergenza e shear sono legate al potenziale in questo modo:

$$k = \frac{1}{2}(\partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2)\phi = \frac{1}{2}\nabla^2\phi \quad (14)$$

$$\gamma_1 = (\partial_1 \partial_1 - \partial_2 \partial_2)\phi \quad (15)$$

$$\gamma_2 = \partial_1 \partial_2 \phi \quad (16)$$

Dalla discussione fatta risulta chiaro che l'effetto lente gravitazionale consente di sondare la distribuzione di massa all'interno di sistemi lenticolari [4].

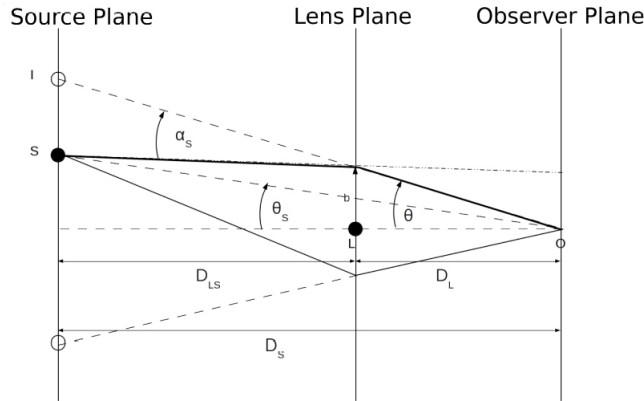


Figura 3: Schema ottico dell'effetto lente gravitazionale.

## 4 Microlensing gravitazionale

Quando  $\vartheta_E$  è più piccolo della tipica risoluzione angolare di un telescopio, come nel caso di stelle che fanno da lente allo sfondo stellare, si parla di microlente gravitazionale. Risolvendo l'equazione della lente, si possono determinare le posizioni angolari dell'immagine primaria ( $I_1$ ) e dell'immagine secondaria ( $I_2$ ). In fig.4, queste posizioni sono mostrate per quattro diversi valori dei parametri d'impatto  $\vartheta_S$  nel caso ideale di una sorgente puntiforme. Se sorgente e lente sono allineate (primo pannello a sinistra), la simmetria circolare del problema porta alla formazione di un anello luminoso avente raggio  $\vartheta_E$ , aumentando il valore  $\vartheta_S$ , l'immagine secondaria si avvicina alla posizione della lente, mentre l'immagine primaria va alla deriva fuori di esso e al limite per cui  $\vartheta_S \gg \vartheta_E$ , il fenomeno tende a svanire. Tuttavia, osservare immagini multiple durante un evento di microlente è praticamente impossibile con la tecnologia attuale, pertanto il fenomeno deve essere studiato diversamente.

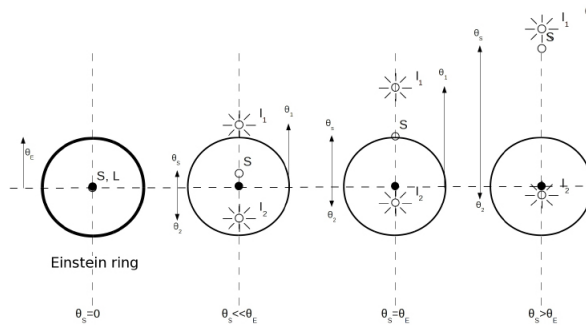


Figura 4: Posizione angolare dell'immagine primaria e secondaria per quattro differenti valori di  $\vartheta_S$ .

Quando una sorgente è soggetta a microlensing, le sue immagini non hanno la stessa luminosità, quindi l'osservatore riceve un flusso totale diverso da quello emesso dalla sorgente. La differenza di flusso può essere descritta molto semplicemente in termini di ingrandimento luce tramite la legge di conservazione dell'intensità specifica  $I_0$ , che rappresenta l'energia del campo con frequenza  $d\nu$  attraversante la superficie  $dA$  durante l'in-

tervallo di tempo  $dt$  nell'angolo solido  $d\omega$  attorno alla direzione ortogonale alla superficie; l'intensità della luce specifica, risulta essere conservata in assenza di fenomeni di assorbimento, dispersione interstellare o spostamenti Doppler (in accordo col Teorema di Liouville<sup>1</sup>). Quello che ci aspettiamo è un ingrandimento o un rimpicciolimento dell'immagine sorgente (come si può apprezzare in fig. 5).

Se la sorgente viene ingrandita, significa che sottende certamente un angolo più ampio rispetto a quello sotteso dalla sorgente in assenza della lente. Nell'effetto di microlente, la dimensione della fonte non deve essere trascurata. Nell'approssimazione di sorgente finita con flusso  $F_S$ , assumendo  $\vartheta_E \ll \vartheta_S$ , si può dimostrare che l'ingrandimento di un'immagine alla posizione angolare  $\vartheta$  è dato da  $A = [(\frac{1-\vartheta_E^4}{\vartheta^4})]^{-1}$ . Di conseguenza, il flusso osservato è uguale a  $F = AF_S$ . Naturalmente, quando la sorgente si sposta dalla linea di vista, l'ingrandimento diminuisce e il flusso  $F_S$  non sottoposto all'effetto lente è recuperato.

Come già anticipato, l'osservatore non può vedere, immagini ben separate, ma può rilevare una singola immagine composta dalla sovrapposizione dell'immagine primaria e secondaria. In questo caso, si può facilmente ottenere il fattore di ingrandimento classico  $A$  sommando i singoli ingrandimenti, cioè

$$A = \frac{u^2 + 2}{\sqrt{u^2(u^2 + 4)}}, \quad (17)$$

dove  $u = \frac{\vartheta_S}{\vartheta_E}$  è detto fattore di impatto. Se c'è un movimento relativo tra la lente e la sorgente,  $u$  cambia con il tempo, con un andamento detto curva di Paczynski [5]. Un ruolo importante nell'effetto microlente gravitazionale è svolto dalle caustiche, i luoghi geometrici dei punti appartenenti al piano della lente dove l'ingrandimento luce di una sorgente puntiforme diventa infinita e da cui nascono le corrispondenti curve critiche nel piano d'origine. Nel caso di una singola lente, la caustica è un punto coincidente con la posizione della lente, pertanto l'ingrandimento diverge quando il parametro d'impatto si avvicina a zero. Tuttavia, le fonti reali non sono puntiformi, quindi abbiamo sempre ingrandimenti finiti che possono essere calcolati da una procedura di media:

$$\langle A \rangle = \frac{\int A(y)I(y)d^2y}{\int I(y)d^2y} \quad (18)$$

dove  $A(y)$  è la fonte di ingrandimento puntiforme,  $I(y)$  è il profilo di luminosità del disco stellare e l'integrale è calcolato sull'intera superficie della sorgente. Le osservazioni mostrano che circa la metà di tutte le stelle sono in sistemi binari, ed inoltre, migliaia di pianeti extrasolari vengono scoperti intorno alle loro stelle di accoglienza da differenti tecniche e strumenti. Pertanto, è utile prendere in considerazione sistemi binari e molteplici che danno origine a microlenti per stimare la porzione di materia oscura in forma barionica.

In questo caso, l'equazione della lente, ovviamente, diventa più complicata, ma, può ancora essere risolta con metodi numerici in modo da avere la mappa d'ingrandimento dove le caustiche assumono forme distinte a seconda della geometria specifica del sistema. In fig. 6, è mostrata la mappa di ingrandimento e la curva di luce risultante per un evento di microlente causato da una lente binaria con rapporto di massa  $q = \frac{M_1}{M_2} \simeq 0.01$ . Il

<sup>1</sup>Il teorema di Liouville sostiene che la densità degli stati nello spazio delle fasi rimane costante se le forze interagenti sono non collisionali e il mezzo di propagazione è approssimativamente trasparente.



vantaggio principale di questa tecnica è la possibilità di rilevare esopianeti molto piccoli in orbita attorno alla propria stella a enormi distanze dalla Terra o semplicemente i cosiddetti pianeti fluttuanti, quasi impossibili da studiare con altre tecniche.

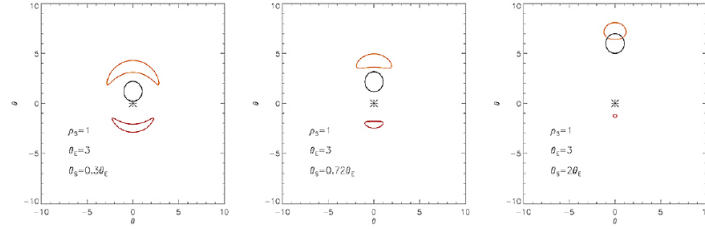


Figura 5: In figura possiamo apprezzare le deformazioni di un disco di raggio  $\rho_s = 1$  e  $\vartheta_E = 3$  per tre differenti valori di  $\vartheta_S$ . I cerchi neri rappresentano i dischi sorgente, mentre i contorni rossi e arancioni sono rispettivamente le deformazione delle immagini primarie e secondarie.

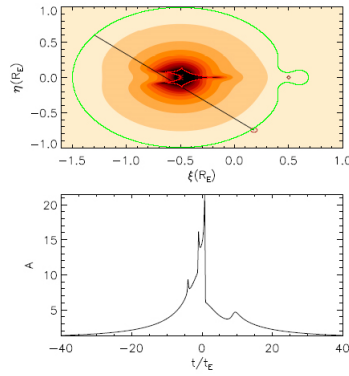


Figura 6: Mappa d'ingrandimento per un sistema binario di lenti caratterizzato da due oggetti separati da una distanza proiettata di  $1R_E$  e rapporto di massa  $q = 0.01$ . La linea verde indica la curva critica, quella rossa la curva caustica e quella nera la traiettoria della stella sorgente, che ha un raggio di  $0.03R_E$ . Nella parte inferiore della figura invece è riportata la curva di luce simulata.

## 5 Risultati di MACHO, EROS e OGLE

Dal grafico in fig. 7 si apprende che: le collaborazioni MACHO (MASSive Compact Halo Object), EROS (Expérience pour la Recherche d'Objets Sombres) e OGLE (Optical Gravitational Lensing Experiment) hanno studiato oggetti candidati ad essere materia oscura nella forma barionica non più grandi di  $\simeq 10$  masse solari e non più piccoli di  $\simeq 10^{-8}$  masse solari. I risultati di MACHO (regione esclusiva in verde) indicano che meno del 5% della materia oscura si trova in forma barionica e questi oggetti hanno una massa compresa tra 0.1 e 1 masse solari; i risultati di OGLE (regione inclusiva in rosa) sono sostanzialmente coerenti con quelli di MACHO ma con una massa compresa tra 0.01 e 1 masse solari. I risultati di EROS invece (regione esclusiva in azzurro) estendono il campo ad oggetti con masse più grande.

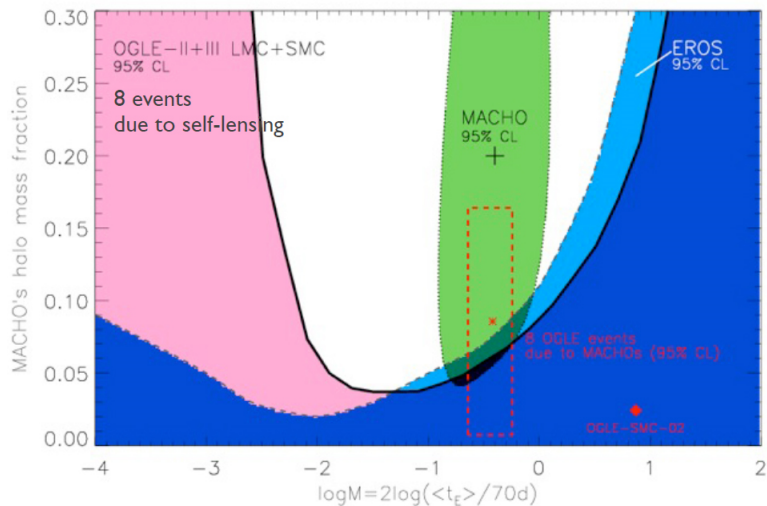


Figura 7: In figura possiamo apprezzare i risultati dei tre esperimenti MACHO, EROS e OGLE i quali danno la percentuale di materia oscura barionica in forma di MACHO a seconda della massa dei candidati. Da questo emerge che al massimo il 5% della materia oscura si trova sotto forma di MACHO con massa compresa tra 0.1 e 1 masse solari, lasciando il problema di spiegare la natura del restante 95% di materia oscura.

I best fit dei rispettivi esperimenti indicano che la frazione di materia oscura di tipo barionico al massimo può essere dell'ordine del 20% del totale della materia oscura che è necessaria per spiegare la curva di rotazione della nostra galassia. Allo stesso tempo i risultati di EROS e di OGLE tendono invece a preferire una frazione di materia oscura molto più bassa, non più grande del 5%. È ovvio che questi esperimenti non sono sensibili a lenti con massa molto grande (dell'ordine di centinaia/migliaia di masse solari) per le quali si hanno tempi di Einstein molto lunghi (da qualche anno a decine di anni). In linea di principio la materia oscura di tipo barionico potrebbe benissimo essere costituita da oggetti di questa massa che solo esperimenti dedicati potrebbero riuscire ad osservare [6].

## Riferimenti bibliografici

- [1] Einstein, A., *Lens-like action of a star by the deviation of light in the gravitational field*, Science, 1936. [2] Zwicky, F., *Nebulae as a gravitational lenses*, Phys. Rev., 1937. [3] Meneghetti, M., *Introduction to Gravitational Lensing*, Bologna, 2017. [4] Depaolis, M. et al., *The scales of gravitational lensing*, Academic editor, 2016. [5] Paczynski, B., *Gravitational microlensing by the galactic halo*, Astrophysical Journal, 1986. [6] Alcock, C. et al., *The macho project*, The European Physical Journal, 1997.